با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها

همه چیز
برای موفقیت
تو!

- دانلود رایگان آزمون های آزمایشی قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...
- دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس
- دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی (نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی
- دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی و شب امتحانی

کافیست هر فایلی که نیاز دارید را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir

t.me/irantooshe

گام به گام ریاضی و آمار ۳ دوازدهم
فصل اول

عنوان فصل: آمار و احتمال

از صفحه‌ی ۱ تا صفحه‌ی ۴۴ کتاب

در این فایل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی، تمرین‌ها و پرسش‌های فصل آمار و احتمال آمده است.

مباحث فصل: درس ۱ شمارش، درس ۲ احتمال، درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل

تهیه‌شده در ایران‌توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست پرسش‌ها

۱	صفحه ۲ · فعالیت — درس ۱: شمارش (۲ پرسش)	۸
۳	صفحه ۳ · فعالیت — درس ۱: شمارش	۸
۴	صفحه ۴ · کار در کلاس — درس ۱: شمارش	۹
۵	صفحه ۵ · فعالیت — درس ۱: شمارش (۲ پرسش)	۱۰
۷	صفحه ۶ · فعالیت — درس ۱: شمارش	۱۰
۸	صفحه ۶ · کار در کلاس — درس ۱: شمارش (۴ پرسش)	۱۰
۱۲	صفحه ۷ · فعالیت — درس ۱: شمارش (۲ پرسش)	۱۲
۱۴	صفحه ۸ · فعالیت — درس ۱: شمارش (۲ پرسش)	۱۳
۱۶	صفحه ۹ · کار در کلاس — درس ۱: شمارش	۱۳
۱۷	صفحه ۱۰ · کار در کلاس — درس ۱: شمارش (۳ پرسش)	۱۴
۲۰	صفحه ۱۰ · تمرین — درس ۱: شمارش (۴ پرسش)	۱۵
۲۴	صفحه ۱۱ · تمرین — درس ۱: شمارش (۱۷ پرسش)	۱۶
۴۱	صفحه ۱۲ · فعالیت — درس ۲: احتمال	۲۱
۴۲	صفحه ۱۳ · فعالیت — درس ۲: احتمال (۲ پرسش)	۲۲

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴۴ صفحه ۱۳ ۰ کار در کلاس — درس ۲: احتمال (۷ پرسش) ۲۲

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۱ صفحه ۱۴ · فعالیت — درس ۲: احتمال (۳ پرسش) ۲۴

۵۴ صفحه ۱۴ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۲۵

۵۵ صفحه ۱۵ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال (۵ پرسش) ۲۶

۶۰ صفحه ۱۶ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال (۶ پرسش) ۲۸

۶۶ صفحه ۱۷ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۲۹

۶۷ صفحه ۱۸ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال (۵ پرسش) ۲۹

۷۲ صفحه ۱۹ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال (۵ پرسش) ۳۳

۷۷ صفحه ۱۹ · فعالیت — درس ۲: احتمال (۵ پرسش) ۳۴

۸۲ صفحه ۲۰ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال (۵ پرسش) ۳۵

۸۷ صفحه ۲۱ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال (۶ پرسش) ۳۶

۹۳ صفحه ۲۲ · فعالیت — درس ۲: احتمال (۵ پرسش) ۳۸

۹۸ صفحه ۲۳ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال (۳ پرسش) ۴۰

۱۰۱ صفحه ۲۵ · تمرین — درس ۲: احتمال (۱۲ پرسش) ۴۰

۱۱۳ صفحه ۲۶ · تمرین — درس ۲: احتمال (۲۰ پرسش) ۴۴

۱۳۳ صفحه ۲۷ · تمرین — درس ۲: احتمال (۳ پرسش) ۵۰

۱۳۶ صفحه ۲۷ · خواندنی — درس ۲: احتمال ۵۱

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۳۷ صفحه ۲۹ · فعالیت — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل (۴ پرسش) ۵۲

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۴۱ صفحه ۳۰ · فعالیت — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل (۳ پرسش) ۵۴

۱۴۴ صفحه ۳۱ · کار در کلاس — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۵۶

۱۴۵ صفحه ۳۲ · بحث و گفت‌وگو — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل (۲ پرسش) ۵۷

۱۴۷ صفحه ۳۳ · کار در کلاس — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل (۳ پرسش) ۵۸

۱۵۰ صفحه ۳۶ · کار در کلاس — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۶۰

۱۵۱ صفحه ۳۷ · کار در کلاس — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۶۱

۱۵۲ صفحه ۳۷ · گام ۵ (بحث و نتیجه‌گیری) — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۶۲

۱۵۳ صفحه ۳۸ · کار در کلاس — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۶۲

۱۵۴ صفحه ۳۹ · کار در کلاس — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۶۳

۱۵۵ صفحه ۳۹ · تمرین — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۶۴

۱۵۶ صفحه ۴۰ · تمرین — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل (۲ پرسش) ۶۴

۱۵۸ صفحه ۴۱ · تمرین — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۶۶

۱۵۹ صفحه ۴۲ · تمرین — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل (۲ پرسش) ۶۸

۱۶۱ صفحه ۴۳ · تمرین — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل (۲ پرسش) ۷۰

۱۶۳ صفحه ۴۴ · تمرین — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۷۲

۱۶۴ صفحه ۴۴ · پروژه — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۷۴

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱ صفحه ۲ فعالیت

۱. فرض کنید در کتابخانه‌ی مدرسه ۳۰ کتاب متفاوت درباره‌ی روان‌شناسی و ۲۵ کتاب متفاوت با موضوع تعلیم و تربیت اسلامی وجود دارد. اگر دانش‌آموزی فرصت داشته باشد فقط یک کتاب با موضوع روان‌شناسی «یا» تعلیم و تربیت اسلامی مطالعه کند، برای این کار چند انتخاب دارد؟

کتاب را یا از بین ۳۰ کتاب روان‌شناسی یا از بین ۲۵ کتاب تعلیم و تربیت اسلامی انتخاب می‌کنیم و این دو کار را نمی‌توان هم‌زمان انجام داد؛ پس طبق اصل جمع:

۳۰ + ۲۵ = ۵۵

دانش‌آموز ۵۵ راه برای انتخاب دارد.

۲ صفحه ۲ فعالیت

۲. خانم فاطمی پرستار بیمارستان حضرت زینب (س) است. او می‌تواند به‌صورت «رایگان» (استفاده از سرویس بیمارستان یا پیاده‌روی) یا با «پرداخت هزینه» (استفاده از تاکسی، اتوبوس یا مترو) به محل کارش برود. خانم فاطمی برای رسیدن به محل کارش چند انتخاب دارد؟ همه‌ی حالت‌های ممکن را که او می‌تواند به‌صورت رایگان «یا» با پرداخت هزینه به محل کار برود، در یک مجموعه بنویسید: A = {، ، ، ، پیاده‌روی}.

رایگان: ۲ راه (سرویس بیمارستان، پیاده‌روی)؛ با پرداخت هزینه: ۳ راه (تاکسی، اتوبوس، مترو). این حالت‌ها هم‌زمان رخ نمی‌دهند، پس طبق اصل جمع:

۲ + ۳ = ۵

A = {سرویس بیمارستان، تاکسی، اتوبوس، مترو، پیاده‌روی} و تعداد انتخاب‌ها ۵ است.

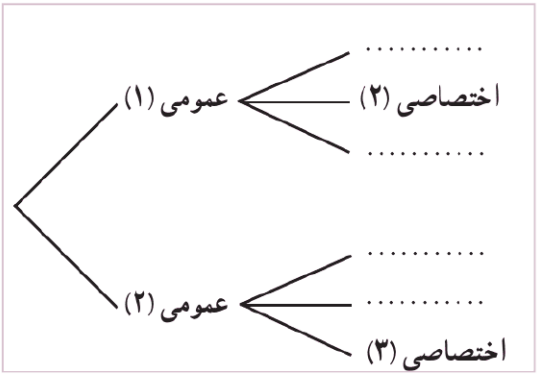
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳ صفحه ۳ فعالیت

فرض کنید دانشجویی می‌خواهد از بین دو درس عمومی ارائه شده، یک درس عمومی و از میان سه درس اختصاصی ارائه شده، یک درس را انتخاب کند. او به چند طریق می‌تواند یک درس عمومی «و» یک درس اختصاصی خود را انتخاب کند؟ با کامل کردن نمودار زیر به سؤال بالا پاسخ دهید. انتخاب درس عمومی به دو

طریق امکان‌پذیر است و هر کدام که انتخاب شود برای انتخاب درس اختصاصی ..... راه انتخاب وجود دارد.

پس در کل، این کار به .... = ... × .... طریق امکان‌پذیر است.



از هر درس عمومی، سه شاخه‌ی اختصاصی (۱)، (۲) و (۳) خارج می‌شود:

- عمومی (۱): اختصاصی (۱)، اختصاصی (۲)، اختصاصی (۳)
- عمومی (۲): اختصاصی (۱)، اختصاصی (۲)، اختصاصی (۳)

انتخاب درس عمومی به ۲ طریق ممکن است و برای هر کدام، ۳ راه برای انتخاب درس اختصاصی وجود دارد.

طبق اصل ضرب:

$۲ \times ۳ = ۶$

این کار به ۶ طریق امکان‌پذیر است.

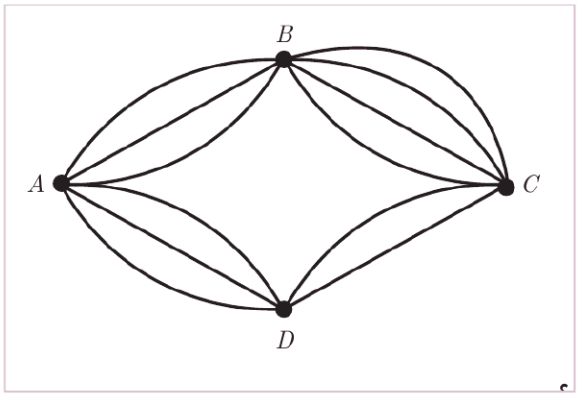
۴ صفحه ۴ **کار در کلاس**

مطابق شکل زیر، میان چهار شهر A، B، C و D راه‌هایی وجود دارد؛ مشخص کنید که به چند طریق می‌توان:

الف) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B سفر کرد؟

ب) از شهر A به شهر C سفر کرد؟

پ) از شهر B به شهر D سفر کرد؟



از شکل: A به B سه راه، B به C چهار راه، A به D سه راه و D به C دو راه وجود دارد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

الف) از A به B سه راه است و از هر کدام از آنها برای رفتن به C چهار راه داریم؛ طبق اصل ضرب: ۳ × ۴ = ۱۲

ب) از A به C می‌توان یا از مسیر A→B→C «یا» A→D→C رفت (اصل جمع): ۳×۴ + ۳×۲ = ۱۲ + ۶ = ۱۸

پ) از B به D یا مسیر B→C→D «یا» B→A→D را می‌توان رفت: ۴×۲ + ۳×۳ = ۸ + ۹ = ۱۷

---

۵ صفحه ۵ فعالیت

۱ــ اگر افراد A، B و C بخواهند در یک همایش سخنرانی کنند، این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟

نفر اول را از بین ۳ نفر، نفر دوم را از ۲ نفر باقی‌مانده و نفر سوم را از ۱ نفر باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم؛ طبق اصل ضرب: ۳ × ۲ × ۱ = ۶

حالت‌ها: ABC – ACB – BAC – BCA – CAB – CBA

---

۶ صفحه ۵ فعالیت

۲ــ با ارقام ۲، ۷، ۴، ۵ و ۶ چند عدد ۵ رقمی (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

برای رقم اول ۵ انتخاب، دوم ۴، سوم ۳، چهارم ۲ و پنجم ۱ انتخاب داریم:

۵ × ۴ × ۳ × ۲ × ۱ = ۵! = ۱۲۰

---

۷ صفحه ۶ فعالیت

۳ــ ثابت کنید تعداد کل جایگشت‌های n تایی از n شیء متمایز، برابر است با n!.

حل: اگر برای هر کدام از این اشیا یک مکان در نظر بگیریم، برای مکان اول از چپ (یا راست) n انتخاب داریم و برای مکان بعدی ..... انتخاب داریم و ... و برای مکان آخر یک انتخاب داریم و بنابر اصل ضرب، کل حالت‌ها برابر است با، n × (n−۱) × (n−۲) × ... × ۲ × ۱ = ...

مکان اول: n انتخاب؛ مکان بعدی: n−۱ انتخاب؛ مکان بعدی n−۲ انتخاب و ... ؛ مکان یکی‌مانده به آخر: ۲ انتخاب؛ مکان آخر: ۱ انتخاب. بنابر اصل ضرب:

n × (n−۱) × (n−۲) × ... × ۲ × ۱ = n!

پس تعداد جایگشت‌های n تایی از n شیء متمایز برابر n! است.

---

۸ صفحه ۶ کار در کلاس

ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ مفروض‌اند؛ با این ارقام:

irantooshe.ir

۱. چند عدد پنج رقمی و بدون تکرار ارقام، می‌توان نوشت؟ (توجه دارید که صفر در سمت چپ اعداد خوانده نمی‌شود.)

رقم اول صفر نمی‌شود، پس ۵ انتخاب دارد (۱ تا ۵). رقم‌های بعدی از میان ارقام باقی‌مانده (صفر هم می‌تواند باشد) به ترتیب ۵، ۴، ۳ و ۲ انتخاب دارند. طبق اصل ضرب:

$۵ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۵ \times ۵! = ۶۰۰$

۹ صفحه ۶ کار در کلاس

ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ مفروض‌اند؛ با این ارقام:

۲. چند عدد ۵ رقمی و فرد (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟ (می‌دانیم که اگر رقم یکان یک عدد، فرد باشد آن عدد فرد است.)

ابتدا رقم یکان را انتخاب می‌کنیم: ۱ یا ۳ یا ۵، یعنی ۳ انتخاب. رقم اول نباید صفر یا رقم یکان باشد: ۴ انتخاب. سپس رقم‌های دوم، سوم و چهارم به ترتیب ۴، ۳ و ۲ انتخاب دارند:

$۴ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۳ = ۲۸۸$

۱۰ صفحه ۶ کار در کلاس

ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ مفروض‌اند؛ با این ارقام:

۳. چند عدد پنج رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

روش اول: تعداد ۵ رقمی‌های فرد - تعداد کل ۵ رقمی‌ها = تعداد ۵ رقمی‌های زوج

روش دوم: اعداد زوج و ۵ رقمی‌ای که با این ارقام می‌توان ساخت، یا به صفر ختم می‌شوند یا به ۲ و ۴. تعداد اعداد را در هر حالت جدا محاسبه می‌کنیم و بنابر اصل جمع، آنها را جمع می‌کنیم: الف) ۵ رقمی‌هایی که به صفر ختم می‌شوند؛ ب) ۵ رقمی‌هایی که به ۲ یا ۴ ختم می‌شوند.

روش اول: تعداد ۵ رقمی‌های زوج = تعداد کل - تعداد فردها: $۶۰۰ - ۲۸۸ = ۳۱۲$

روش دوم: الف) یکان صفر: بقیه‌ی ۴ مکان با ۵ رقم باقی‌مانده، یعنی $۵! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ = ۱۲۰$

ب) یکان ۲ یا ۴ (۲ انتخاب)؛ رقم اول نه صفر است و نه رقم یکان (۴ انتخاب)، سپس ۴، ۳ و ۲ انتخاب: $۴ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۲ = ۱۹۲$

طبق اصل جمع، تعداد ۵ رقمی‌های زوج: $۱۲۰ + ۱۹۲ = ۳۱۲$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۱۱ صفحه ۶ کار در کلاس

ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ مفروض‌اند؛ با این ارقام:

۴. چند عدد ۵ رقمی و مضرب ۵ (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟ (۵ رقمی‌هایی که به ۵ ختم می‌شوند + ۵ رقمی‌هایی که به صفر ختم می‌شوند = تعداد ۵ رقمی‌های مضرب ۵)

عدد مضرب ۵ است اگر رقم یکانش ۰ یا ۵ باشد.

یکان صفر: $۵! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ = ۱۲۰$

یکان ۵: رقم اول ۴ انتخاب (نه صفر و نه ۵)، سپس ۴، ۳، ۲ انتخاب: $۴ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۹۶$

تعداد ۵ رقمی‌های مضرب ۵: $۱۲۰ + ۹۶ = ۲۱۶$

۱۲ صفحه ۷ فعالیت

۱. فرض کنید بخواهیم تعداد اعداد ۴ رقمی را که با ارقام ۱ تا ۷ می‌توان نوشت، حساب کنیم. در این صورت، داریم: (تکرار ارقام مجاز نیست.) تعداد انتخاب‌ها: ۷ × ... × ... × ... ؛ از طرفی ۷ × ۶ × ۵ × ۴ = ...

ارقام ۱ تا ۷، تکرار مجاز نیست؛ طبق اصل ضرب: $۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ = ۸۴۰$

از طرفی با ضرب و تقسیم بر ۳! داریم: $۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ = \frac{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳!}{۳!} = \frac{۷!}{۳!} = \frac{۷!}{(۷-۴)!} = ۸۴۰$

(در این جایگشت‌ها ترتیب قرار گرفتن اشیای انتخاب شده اهمیت دارد.)

۱۳ صفحه ۷ فعالیت

۲. به چند طریق می‌توانیم سه کتاب را از بین ۵ کتاب متمایز، انتخاب کنیم و در یک ردیف بچینیم؟ (تعداد انتخاب‌ها: ۵ × ... × ... = ... ؛ از طرفی ۵!/(۵-۳)! = ...)

کتاب اول ۵ انتخاب، دوم ۴ و سوم ۳ انتخاب: $۵ \times ۴ \times ۳ = ۶۰$

از طرفی: $\frac{۵!}{(۵-۳)!} = \frac{۵!}{۲!} = \frac{۱۲۰}{۲} = ۶۰$

۱۴ صفحه ۸ فعالیت

۳. در حالت کلّی، نشان دهید تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء ($r \le n$)، که جابه‌جایی r شیء انتخاب شده اهمیت داشته باشد، برابر است با $n!/(n-r)!$. (تعداد انتخاب‌ها: $(n-r+1)$، $(n-r+2)$ ، ... ، $n-1$، n ← طبق اصل ضرب: $n(n-1)(n-2)...(n-r+2)$(.....))

r مکان داریم: مکان اول n انتخاب، مکان دوم $n-1$، ... ، مکان r ام $(n-r+1)$ انتخاب. طبق اصل ضرب:

$$n(n-1)(n-2)...(n-r+2)(n-r+1)$$

صورت و مخرج را در $(n-r)!$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\times(n-r)!}{(n-r)!}=\frac{n!}{(n-r)!}$$

پس این تعداد برابر است با $\frac{n!}{(n-r)!}$ که آن را با $P(n, r)$ نشان می‌دهیم.

۱۵ صفحه ۸ فعالیت

فرض کنید بخواهیم از میان ارقام ۱، ۲، ۴ و ۶ سه رقم انتخاب کنیم و با آنها یک مجموعه‌ی سه عضوی تشکیل دهیم. با توجه به تعریف مجموعه که بر اساس آن، جابه‌جایی اعضای یک مجموعه، مجموعه‌ی جدیدی تولید نمی‌کند و نیز چون سه رقم انتخاب شده، ۳! جایگشت دارند که برای تشکیل مجموعه فقط یک مجموعه ساخته می‌شود (هر ۶ حالت ۱ مجموعه می‌سازد)، برای رسیدن به جواب مسئله کافی است کل جایگشت‌های سه‌تایی از ۴ رقم (انتخاب‌های سه‌تایی از بین ۴ رقم) را بر ..... تقسیم کنیم. جدول زیر را کامل کنید.

انتخاب سه رقم	۱،۲،۴	۱،۲،۶	۱،۴،۶	۲،۴،۶
جایگشت‌های سه رقم انتخاب شده	۱۲۴	۱۲۶	۱۴۶	۲۴۶
	۱۴۲	۱۶۲	۱۶۴	۲۶۴
	۲۴۱	۲۱۶	۴۱۶	۴۲۶
	۲۱۴	۲۶۱	۴۶۱	۴۶۲
	۴۱۲	۶۱۲	۶۱۴	۶۲۴
	۴۲۱	۶۲۱	۶۴۱	۶۴۲
	$A_1=\{1,2,4\}$	$A_3=\{...,...,...\}$	$A_2=\{1,4,6\}$	$A_4=\{...,...,...\}$

باید بر ۳! = ۶ تقسیم کنیم. تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از ۴ رقم: $P(4,3) = 4! \div 1! = 24$

مجموعه‌های جدول: $A_2 = \{1، 2، 6\}$ و $A_4 = \{2، 4، 6\}$. تعداد مجموعه‌های سه‌عضوی:

$$\frac{24}{6} = 4 \text{ یا } \frac{P(4,3)}{3!} = \frac{4!}{3! \times 1!} = 4$$

۱۶ صفحه ۹ کار در کلاس

۱. به چند طریق می‌توان با ارقام ۱ تا ۹، عددی ۵ رقمی ساخت؟ (تکرار مجاز نیست.)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

روش اول: ... × ۸ × ... × ... × ۵ ؛ روش دوم: (...−۹)/!۹ = (..., ۹)P = !...

روش اول: ۱۵۱۲۰ = ۵ × ۶ × ۷ × ۸ × ۹

روش دوم: $P(9,5)=\frac{9!}{(9-5)!}=\frac{9!}{4!}=9\times8\times7\times6\times5=15120$

۱۷ صفحه ۱۰ کار در کلاس

۲. به چند طریق می‌توان از بین ۹ نفر یک تیم والیبال ۶ نفره تشکیل داد؟ (در ساختن تیم با جابه‌جایی افراد انتخاب شده، تیم جدیدی تولید نمی‌شود، بنابراین، از ترکیب استفاده می‌کنیم.)

$\binom{9}{6}=\frac{9!}{6!\times3!}=\frac{9\times8\times7}{3!}=84$

تعداد تیم‌های ۶ نفره ۸۴ است.

۱۸ صفحه ۱۰ کار در کلاس

۳. مجموعه‌ی ۸ عضوی A = {۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸} چند زیرمجموعه‌ی سه عضوی دارد؟

ترتیب اعضای زیرمجموعه مهم نیست، پس از ترکیب استفاده می‌کنیم:

$\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!\times5!}=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

۱۹ صفحه ۱۰ کار در کلاس

۴. در جعبه‌ای ۴ مهره‌ی قرمز و ۵ مهره‌ی آبی وجود دارد. به چند طریق می‌توانیم سه مهره از این جعبه خارج کنیم؟ (در انتخاب مهره‌های رنگی نیز ترتیب مهم نیست.)

در کل ۹ مهره داریم و ۳ مهره (بدون توجه به ترتیب) انتخاب می‌کنیم:

$\binom{9}{3}=\frac{9!}{3!\times6!}=\frac{9\times8\times7}{3!}=84$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۰ صفحه ۱۰ تمرین

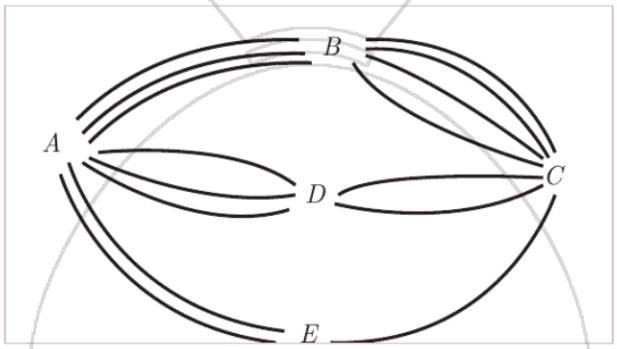
۱. می‌خواهیم از بین ۱۰ دانش‌آموز کلاس دهم و ۱۱ دانش‌آموز کلاس یازدهم و ۱۲ دانش‌آموز کلاس دوازدهم یک دانش‌آموز انتخاب کنیم؛ به چند طریق می‌توانیم این دانش‌آموز را انتخاب کنیم؟

فقط یک نفر از یکی از سه کلاس انتخاب می‌شود؛ طبق اصل جمع: ۳۳ = ۱۲ + ۱۱ + ۱۰

۲۱ صفحه ۱۰ تمرین

۲. مطابق شکل زیر بین پنج شهر A، B، C، D و E راه‌هایی وجود دارد که همه دو طرفه‌اند. مشخص کنید به چند طریق می‌توان:

الف) از شهر A به شهر C مسافرت کرد؟



از شکل: A–B سه راه، B–C چهار راه، A–D سه راه، D–C دو راه، A–E دو راه و E–C یک راه.

مسیرهای A به C: از B «یا» از D «یا» از E (اصل جمع)، و هر مسیر با اصل ضرب:

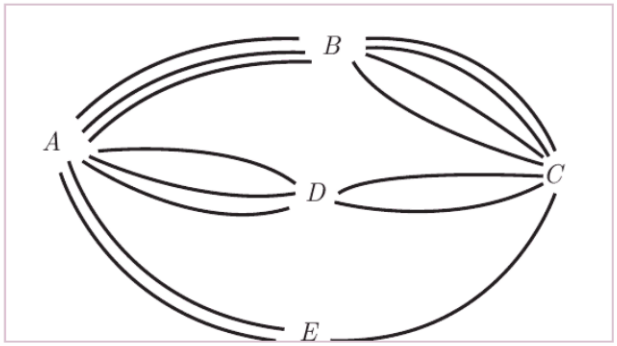
۲۰ = ۲ + ۶ + ۱۲ = ۲×۱ + ۳×۲ + ۳×۴

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۲ صفحه ۱۰ تمرین

۲. مطابق شکل زیر بین پنج شهر A، B، C، D و E راه‌هایی وجود دارد که همه دو طرفه‌اند. مشخص کنید به چند طریق می‌توان:

ب) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B مسافرت رفت و برگشت انجام داد؟



رفت: A→B→C به ۱۲ = ۴ × ۳ طریق؛ برگشت: C→B→A (راه‌ها دو طرفه‌اند) به ۱۲ = ۳ × ۴ طریق. طبق اصل ضرب:

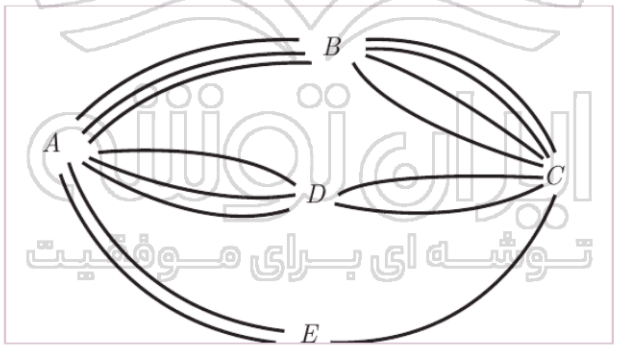
۱۴۴ = ۱۲ × ۱۲

(هنگام برگشت می‌توان از همان راه‌های رفت دوباره استفاده کرد.)

۲۳ صفحه ۱۰ تمرین

۲. مطابق شکل زیر بین پنج شهر A، B، C، D و E راه‌هایی وجود دارد که همه دو طرفه‌اند. مشخص کنید به چند طریق می‌توان:

پ) از شهر D بدون عبور از شهر E به شهر A مسافرت کرد؟



بدون عبور از E، دو مسیر داریم: مستقیم D→A و مسیر D→C→B→A (مسیر D→C→E→A از E می‌گذرد و حذف می‌شود).

۳ :D→A راه؛ D→C→B→A: ۲ × ۴ × ۳ = ۲۴

طبق اصل جمع: ۳ + ۲۴ = ۲۷

۲۴ صفحه ۱۱ تمرین

۳. با حروف کلمه‌ی «ولایت» و بدون تکرار حروف: (با معنی یا بی‌معنی)

الف) چند کلمه‌ی ۵ حرفی می‌توان نوشت؟

کلمه ۵ حرف متمایز دارد و هر ۵ حرف باید به کار رود: $۵! = ۵\times۴\times۳\times۲\times۱ = ۱۲۰$

۲۵ صفحه ۱۱ تمرین

۳. با حروف کلمه‌ی «ولایت» و بدون تکرار حروف: (با معنی یا بی‌معنی)

ب) چند کلمه‌ی ۳ حرفی می‌توان نوشت که به «ی» ختم شوند؟

حرف آخر «ی» ثابت است؛ حرف اول از ۴ حرف باقی‌مانده و حرف دوم از ۳ حرف باقی‌مانده: $۴ \times ۳ \times ۱ = ۱۲$

۲۶ صفحه ۱۱ تمرین

۳. با حروف کلمه‌ی «ولایت» و بدون تکرار حروف: (با معنی یا بی‌معنی)

پ) چند کلمه‌ی ۵ حرفی می‌توان نوشت که با «و» شروع و به «ل» ختم شوند؟

حرف اول «و» و حرف آخر «ل» ثابت‌اند؛ سه حرف باقی‌مانده در ۳ مکان وسط جایگشت می‌شوند: $۱ \times ۲ \times ۳ \times ۱ \times ۱ = ۳! = ۶$

۲۷ صفحه ۱۱ تمرین

۴. یک دوره بازی فوتبال بین ۱۰ تیم فوتبال، به‌صورت رفت و برگشت انجام می‌شود. اگر همه‌ی تیم‌ها با هم بازی داشته باشند، در پایان دوره چند بازی انجام شده است؟

هر بازی را با (میزبان، مهمان) مشخص می‌کنیم: میزبان ۱۰ انتخاب و مهمان از ۹ تیم دیگر؛ چون رفت و برگشت داریم ترتیب مهم است: $P(۱۰,۲) = ۱۰ \times ۹ = ۹۰$

(یا $\binom{۱۰}{۲} \times ۲ = ۴۵ \times ۲ = ۹۰$)

۲۸ صفحه ۱۱ تمرین

۵. یک کارخانه‌ی خودروسازی خودروهایی در ۷ رنگ، با ۲ حجم موتور و ۳ نوع مختلف جلو داشبورد تولید می‌کند. یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب دارد؟

انتخاب رنگ «و» حجم موتور «و» نوع جلو داشبورد؛ طبق اصل ضرب: $۷ \times ۲ \times ۳ = ۴۲$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۹ صفحه ۱۱ تمرین

۶. مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ مفروض است؛

الف) با ارقام موجود در این مجموعه چند عدد ۵ رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می‌توان ساخت؟

رقم یکان باید زوج باشد: ۲، ۴، ۶ یا ۸ (۴ انتخاب). چهار رقم دیگر از ۵ رقم باقی‌مانده، به ترتیب ۵، ۴، ۳ و ۲ انتخاب دارند:

$$۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۴ = ۴۸۰$$

۳۰ صفحه ۱۱ تمرین

۶. مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ مفروض است؛

ب) چند عدد ۵ رقمی و بزرگ‌تر از ۸۰۰۰۰ می‌توان نوشت؟

عدد ۵ رقمی بزرگ‌تر از ۸۰۰۰۰ باید با ۸ یا ۹ شروع شود (چون در A صفر نیست، هر عدد با رقم اول ۸ از ۸۰۰۰۰ بزرگ‌تر است). رقم اول ۲ انتخاب دارد و هر یک از ۴ رقم بعدی ۶ انتخاب (تکرار ارقام مجاز است):

$$۲ \times ۶ \times ۶ \times ۶ \times ۶ = ۲۵۹۲$$

(در صورت سؤال تکرار ارقام برای این قسمت مشخص نشده است و در اینجا مجاز فرض شد. اگر تکرار ارقام مجاز نباشد: $۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۲ = ۲۴۰$)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۳۱ صفحه ۱۱ تمرین

۶. مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ مفروض است؛

پ) مجموعه‌ی A چند زیرمجموعه‌ی سه عضوی دارد؟

$\binom{۶}{۳} = ۲۰$ (ترتیب اعضا مهم نیست و $\frac{۶ \times ۵ \times ۴}{۳!} = ۲۰$)

۳۲ صفحه ۱۱ تمرین

۶. مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ مفروض است؛

ت) مجموعه‌ی A چند زیرمجموعه‌ی سه عضوی و شامل رقم ۸ دارد؟

عضو ۸ را حتماً برمی‌داریم و دو عضو دیگر را از ۵ عضو باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم: $\binom{۵}{۲} = ۱۰$

۳۳ صفحه ۱۱ تمرین

۷. روی محیط یک دایره ۱۲ نقطه وجود دارد. مشخص کنید:

الف) با این دوازده نقطه، چه تعداد مثلث می‌توان تشکیل داد؟

هر ۳ نقطه یک مثلث می‌سازد و ترتیب مهم نیست (هیچ سه نقطه‌ی روی دایره روی یک خط نیست):

$$\binom{۱۲}{۳} = \frac{۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰}{۳!} = ۲۲۰$$

۳۴ صفحه ۱۱ تمرین

۷. روی محیط یک دایره ۱۲ نقطه وجود دارد. مشخص کنید:

ب) چه تعداد وتر می‌توان تشکیل داد؟

هر وتر با دو نقطه از دایره مشخص می‌شود و ترتیب دو نقطه مهم نیست: $\binom{۱۲}{۲} = \frac{۱۲ \times ۱۱}{۲} = ۶۶$

۳۵ صفحه ۱۱ تمرین

۸. می‌خواهیم از بین ۵ دانش‌آموز پایه‌ی یازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه‌ی دوازدهم افرادی را انتخاب کنیم و یک تیم ۶ نفره‌ی والیبال تشکیل دهیم. مشخص کنید به چند طریق می‌توانیم این تیم را تشکیل بدهیم؛ هرگاه بخواهیم:

الف) به تعداد مساوی دانش‌آموز پایه‌ی یازدهم و دوازدهم در تیم حضور داشته باشند.

۳ نفر از یازدهمی‌ها «و» ۳ نفر از دوازدهمی‌ها: $C(۵,۳) \times C(۶,۳) = ۱۰ \times ۲۰ = ۲۰۰$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۶ صفحه ۱۱ تمرین

۸. می‌خواهیم از بین ۵ دانش‌آموز پایه‌ی یازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه‌ی دوازدهم افرادی را انتخاب کنیم و یک تیم ۶ نفره‌ی والیبال تشکیل دهیم. مشخص کنید به چند طریق می‌توانیم این تیم را تشکیل بدهیم؛ هرگاه بخواهیم:

ب) کاپیتان تیم فرد مشخصی از پایه‌ی دوازدهم باشد.

کاپیتان مشخص است؛ ۵ نفر دیگر از ۱۰ نفر باقی‌مانده انتخاب می‌شوند: $C(۱۰,۵) = ۲۵۲$

۳۷ صفحه ۱۱ تمرین

۸. می‌خواهیم از بین ۵ دانش‌آموز پایه‌ی یازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه‌ی دوازدهم افرادی را انتخاب کنیم و یک تیم ۶ نفره‌ی والیبال تشکیل دهیم. مشخص کنید به چند طریق می‌توانیم این تیم را تشکیل بدهیم؛ هرگاه بخواهیم:

پ) حداقل ۴ نفر از اعضای تیم، دانش‌آموز پایه‌ی دوازدهم باشند.

حالت‌ها: ۴ دوازدهمی و ۲ یازدهمی، یا ۵ و ۱، یا ۶ و ۰ (اصل جمع):

$C(۶,۴)\times C(۵,۲) + C(۶,۵)\times C(۵,۱) + C(۶,۶)\times C(۵,۰) = ۱۵\times ۱۰ + ۶\times ۵ + ۱ = ۱۸۱$

۳۸ صفحه ۱۱ تمرین

۸. می‌خواهیم از بین ۵ دانش‌آموز پایه‌ی یازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه‌ی دوازدهم افرادی را انتخاب کنیم و یک تیم ۶ نفره‌ی والیبال تشکیل دهیم. مشخص کنید به چند طریق می‌توانیم این تیم را تشکیل بدهیم؛ هرگاه بخواهیم:

ت) فقط ۲ نفر از اعضای تیم از پایه‌ی یازدهم باشند.

۲ نفر از یازدهمی‌ها و ۴ نفر از دوازدهمی‌ها: $C(۵,۲) \times C(۶,۴) = ۱۰ \times ۱۵ = ۱۵۰$

۳۹ صفحه ۱۱ تمرین

۹. مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن به صورت ($۳^2 + ۳\times ۴ + ۲\times ۳$) باشد.

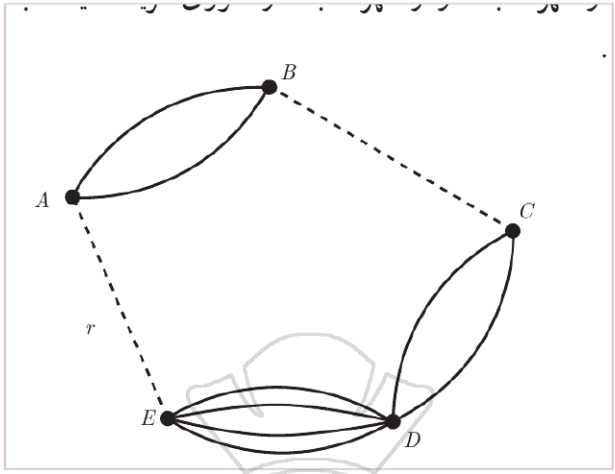
یک نمونه: بین شهرهای A و D سه مسیر وجود دارد: از طریق B (بین A و B سه راه و بین B و D سه راه)، از طریق C (بین A و C سه راه و بین C و D چهار راه) و از طریق E (بین A و E دو راه و بین E و D سه راه). به چند طریق می‌توان از A به D رفت؟

اصل ضرب در هر مسیر و سپس اصل جمع: $۳\times ۳ + ۴\times ۳ + ۳\times ۲ = ۳^2 + ۴\times ۳ + ۳\times ۲ = ۲۷$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴۰ صفحه ۱۱ تمرین

۱۰. تعداد راه‌ها یا جاده‌ها از شهر B به C و از شهر A به E را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر بتوان به ۲۰ طریق از شهر A به شهر D سفر کرد.



تعداد راه‌های B به C را x و A به E را r می‌نامیم. A به B دو راه و C به D دو راه، E به D سه راه دارد.

مسیرها: A→B→C→D و A→E→D؛ طبق اصل ضرب و جمع: $۲ \times x \times ۲ + r \times ۳ = ۲۰$

$۴x + ۳r = ۲۰$؛ r باید طوری باشد که $۲۰ - ۳r$ بر ۴ بخش‌پذیر باشد: $r = ۴$ و $x = ۲$ (چون $۴×۲ + ۳×۴ = ۸ + ۱۲ = ۲۰$).

پس بین B و C دو راه و بین A و E چهار راه تعریف می‌کنیم.

۴۱ صفحه ۱۲ فعالیت

نرگس هر روز صبح ساعت ۷ از منزل خارج می‌شود؛ با وسایل نقلیه‌ی عمومی به مدرسه می‌رود و به‌طور معمول، قبل از ملیکا به مدرسه می‌رسد. امروز صبح نیز نرگس مانند هر روز رأس ساعت ۷ از منزل خارج شده است. آیا می‌توانید به‌طور قطع بگویید که او قبل از ملیکا به مدرسه می‌رسد؟

... آیا وضعیت همیشه عادی است؟ (آغاز حرکت و سرعت وسایل نقلیه‌ی عمومی به‌طور معمول منظم نیست و ... .)

خیر؛ هیچ‌کس نمی‌تواند قطعی پاسخ دهد. اگر وضعیت عادی باشد نرگس به‌موقع می‌رسد، اما وضعیت همیشه عادی نیست: ترافیک، تأخیر یا بی‌نظمی در حرکت وسایل نقلیه‌ی عمومی (و حوادثی مانند خرابی وسیله) می‌تواند وضع را تغییر دهد.

بنابراین دو وضعیت ممکن است: نرگس قبل از ملیکا به مدرسه برسد، یا نرسد؛ و از پیش نمی‌توان یکی را قطعاً پیش‌بینی کرد. چنین پدیده‌ای تصادفی است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴۲ صفحه ۱۳ فعالیت

۱. چند آزمایش تصادفی مثال بزنید.

نمونه‌ها: پرتاب یک سکه (رو یا پشت)، پرتاب یک تاس (یکی از اعداد ۱ تا ۶)، بیرون کشیدن یک مهره از کیسه‌ای که مهره‌های رنگی مختلف دارد، پیش‌بینی نتیجه‌ی مسابقه‌ی فوتبال بین دو تیم، انتخاب تصادفی یک کارت از بین چند کارت.

۴۳ صفحه ۱۳ فعالیت

۲. چند آزمایش قطعی مثال بزنید.

نمونه‌ها: رها کردن سنگ در آب (فرو می‌رود)، گرم کردن آب تا ۱۰۰ درجه‌ی سانتی‌گراد در فشار معمولی (به جوش می‌آید)، بیرون آوردن یک مهره از کیسه‌ای که همه‌ی مهره‌هایش سفید است (سفید بودن مهره)، رها کردن یک توپ از ارتفاع (به زمین می‌افتد).

۴۴ صفحه ۱۳ کار در کلاس

۱. کدام‌یک از پدیده‌های زیر تصادفی و کدام‌یک قطعی است؟ چرا؟

الف) وجود دانش‌آموزی که سن او بیشتر از ده سال باشد، در کلاس پایه‌ی دوازدهم؛

قطعی؛ چون سن دانش‌آموزان پایه‌ی دوازدهم بیش از ۱۰ سال است و نتیجه از پیش معلوم است.

۴۵ صفحه ۱۳ کار در کلاس

۱. کدام‌یک از پدیده‌های زیر تصادفی و کدام‌یک قطعی است؟ چرا؟

ب) در ابتدای مسابقه‌ی فوتبال، پرتاب سکه‌ای که در یک طرف آن عدد ۱ و در طرف دیگرش عدد ۲ حک شده باشد؛

تصادفی؛ نتیجه (۱ یا ۲) قبل از پرتاب مشخص نیست، هرچند همه‌ی حالت‌های ممکن را می‌دانیم.

۴۶ صفحه ۱۳ کار در کلاس

۱. کدام‌یک از پدیده‌های زیر تصادفی و کدام‌یک قطعی است؟ چرا؟

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

پ) مشاهده‌ی دو مهره‌ی سفید، پس از خارج کردن دو مهره از جعبه‌ای که در آن ۷ مهره‌ی سفید وجود دارد؛

قطعی؛ چون همه‌ی مهره‌ها سفیدند، هر دو مهره حتماً سفیدند.

۴۷ صفحه ۱۳ **کار در کلاس**

۱. کدام‌یک از پدیده‌های زیر تصادفی و کدام‌یک قطعی است؟ چرا؟

ت) پیش‌بینی نتیجه‌ی بازی فوتبال بین دو تیم، قبل از بازی؛

تصادفی؛ نتیجه‌ی بازی را از پیش نمی‌توان به‌طور قطع مشخص کرد.

۴۸ صفحه ۱۳ **کار در کلاس**

۱. کدام‌یک از پدیده‌های زیر تصادفی و کدام‌یک قطعی است؟ چرا؟

ث) در یک بازی بین دو نفر، سکه‌ای پرتاب می‌شود و به دنبال آن تاسی انداخته می‌شود. اگر شخصی سکه‌اش رو و تاسش زوج بیاید، برنده است. آیا قبل از بازی می‌توان نفر برنده را مشخص کرد؟

تصادفی؛ قبل از پرتاب‌ها نمی‌توان برنده را مشخص کرد، چون نتیجه‌ی سکه و تاس از پیش معلوم نیست.

۴۹ صفحه ۱۳ **کار در کلاس**

۲. از ۳ مداد و ۵ خودکار که در یک جعبه قرار دارند، به‌طور تصادفی یکی از آنها را خارج می‌کنیم.

الف) آیا مجموعه‌ی عضوی {خودکار، مداد} می‌تواند همه‌ی برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را نشان دهد؟



ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

خیر؛ چون ۳ مداد و ۵ خودکار متفاوت‌اند و انتخاب هر مداد یا هر خودکار یک برآمد جداست (در مجموع ۸ برآمد)، مجموعه‌ی {خودکار، مداد} فقط دو نوع شیء را نشان می‌دهد.

۵۰ صفحه ۱۳ کار در کلاس

۲. از ۳ مداد و ۵ خودکار که در یک جعبه قرار دارند، به‌طور تصادفی یکی از آنها را خارج می‌کنیم.
ب) به نظر شما چگونه می‌توان همه‌ی برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را مشخص کرد؟ (در این کتاب، اشیای مورد بحث را با شماره‌گذاری متمایز می‌کنیم.)



اشیا را شماره‌گذاری می‌کنیم: مدادها را مداد ۱، مداد ۲، مداد ۳ و خودکارها را خودکار ۱ تا خودکار ۵ می‌نامیم.
آن‌گاه فضای نمونه شامل همه‌ی ۸ شیء است:
S = {m۱, m۲, m۳, k۱, k۲, k۳, k۴, k۵} (m: مداد، k: خودکار)

۵۱ صفحه ۱۴ فعالیت

فضای نمونه‌ی هر یک از آزمایش‌های تصادفی زیر را بنویسید.
۱. پرتاب دو سکه با هم.

هر سکه رو (ر) یا پشت (پ) می‌آید: S = {(ر, ر), (پ, ر), (ر, پ), (پ, پ)}
تعداد اعضا: ۲ × ۲ = ۴

۵۲ صفحه ۱۴ فعالیت

فضای نمونه‌ی هر یک از آزمایش‌های تصادفی زیر را بنویسید.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲. پرتاب سه سکه با هم (پرتاب یک سکه سه بار).

{پ‌پ‌پ ,ر‌پ‌پ ,پ‌ر‌پ ,ر‌ر‌پ ,پ‌پ‌ر ,ر‌پ‌ر ,پ‌ر‌ر ,ر‌ر‌ر} = S (حروف به ترتیب سکه‌ی اول تا سوم)

تعداد اعضا: ۸ = ۲ × ۲ × ۲

۵۳ صفحه ۱۴ **فعالیت**

فضای نمونه‌ی هر یک از آزمایش‌های تصادفی زیر را بنویسید.

۳. پرتاب یک تاس و یک سکه باهم.

S = {(ر, ۱), (ر, ۲), (ر, ۳), (ر, ۴), (ر, ۵), (ر, ۶), (پ, ۱), (پ, ۲), (پ, ۳), (پ, ۴), (پ, ۵), (پ, ۶)}

تعداد اعضا: ۱۲ = ۶ × ۲

۵۴ صفحه ۱۴ **کار در کلاس**

۱. برای تعیین فضای نمونه‌ی پرتاب دو تاس آبی و قرمز، جدول زیر را کامل کنید. سپس به کمک اصل ضرب، درستی تعداد کل حالات موجود در جدول را بررسی کنید.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱ , ۱)	(۱ , ۲)				(۱ , ۶)
۲	(۲ , ۱)	(۲ , ۲)				
۳			(۳ , ۳)		(۳ , ۵)	
۴				(۴ , ۴)		
۵			(۵ , ۳)			
۶						(۶ , ۶)

در هر خانه، عدد اول تاس آبی و عدد دوم تاس قرمز است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

آبی | قرمز	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱, ۱)	(۱, ۲)	(۱, ۳)	(۱, ۴)	(۱, ۵)	(۱, ۶)
۲	(۲, ۱)	(۲, ۲)	(۲, ۳)	(۲, ۴)	(۲, ۵)	(۲, ۶)
۳	(۳, ۱)	(۳, ۲)	(۳, ۳)	(۳, ۴)	(۳, ۵)	(۳, ۶)
۴	(۴, ۱)	(۴, ۲)	(۴, ۳)	(۴, ۴)	(۴, ۵)	(۴, ۶)
۵	(۵, ۱)	(۵, ۲)	(۵, ۳)	(۵, ۴)	(۵, ۵)	(۵, ۶)
۶	(۶, ۱)	(۶, ۲)	(۶, ۳)	(۶, ۴)	(۶, ۵)	(۶, ۶)

بررسی با اصل ضرب: تاس آبی ۶ حالت و تاس قرمز ۶ حالت دارد: ۳۶ = ۶ × ۶ که با تعداد خانه‌های جدول (۶ سطر × ۶ ستون) برابر است.

۵۵ صفحه ۱۵ **کار در کلاس**

۲. سه دوست با نام‌های علی، پارسا و محمد در یک ردیف کنار هم می‌نشینند. فضای نمونه‌ی این آزمایش تصادفی را مشخص کنید. چگونه می‌توان تعداد همه‌ی برآمدهای این آزمایش تصادفی را بدون شمردن، مشخص کرد؟

هر برآمد یک ترتیب نشستن (جایگشت) است؛ با نام‌های علی (ع)، پارسا (پ) و محمد (م) از راست به چپ:

S = {(علی، پارسا، محمد)، (علی، محمد، پارسا)، (پارسا، علی، محمد)، (پارسا، محمد، علی)، (محمد، علی، پارسا)، (محمد، پارسا، علی)}

بدون شمردن: صندلی اول ۳ انتخاب، دوم ۲ و سوم ۱ انتخاب؛ طبق اصل ضرب ۶ = !۳ = ۱ × ۲ × ۳.

۵۶ صفحه ۱۵ **کار در کلاس**

۳. در کیسه‌ای ۳ مهره‌ی قرمز، ۴ مهره‌ی آبی و ۴ مهره‌ی سبز وجود دارد. به‌طور تصادفی سه مهره را هم‌زمان از کیسه خارج می‌کنیم. تعداد اعضای فضای نمونه‌ی این پدیده‌ی تصادفی را مشخص کنید.

در کل ۱۱ = ۴ + ۴ + ۳ مهره داریم و ۳ مهره را هم‌زمان (بدون توجه به ترتیب) انتخاب می‌کنیم:

$$n(S) = \binom{11}{3} = \frac{11 \times 10 \times 9}{3!} = 165$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۷ صفحه ۱۵ کار در کلاس

۱. سکه‌ای را یک‌بار پرتاب می‌کنیم؛ می‌دانیم S = {پ, ر}. تمام پیشامدهای ممکن برای این فضای نمونه را بنویسید.

پیشامدها همان زیرمجموعه‌های S هستند (۲^2 = ۴ زیرمجموعه):

∅ , {ر} , {پ} , {پ, ر}

∅ پیشامد غیرممکن و S = {ر, پ} پیشامد حتمی است.

۵۸ صفحه ۱۵ کار در کلاس

۲. مریم، ملیکا و سوگند پول‌هایشان را روی هم گذاشتند و یک رمان درباره‌ی دفاع مقدس از نمایشگاه کتاب مدرسه خریدند. سپس، اسامی خود را روی سه کارت متمایز نوشتند و داخل کیسه‌ای انداختند. آنها با هم قرار گذاشتند که یک کارت را به‌طور تصادفی از کیسه خارج کنند و نام هرکسی که روی آن کارت بود، ابتدا کتاب را به منزل ببرد و مطالعه کند. فضای نمونه‌ی این پدیده‌ی تصادفی را بنویسید. سپس، تمام زیرمجموعه‌های یک عضوی S را مشخص کنید. اگر قرار باشد دو نفر از آنها بعد از مطالعه‌ی کتاب، با هم خلاصه‌ی آن را در کلاس ارائه کنند، پیشامدهای ممکن را بنویسید.

S = {مریم، ملیکا، سوگند}

زیرمجموعه‌های یک عضوی: {مریم}، {ملیکا}، {سوگند} (هر کدام پیشامد «نفر اول کتاب را ببرد»).

پیشامدهای ممکن برای ارائه‌ی دو نفره (زیرمجموعه‌های دو عضوی): {مریم، ملیکا}، {مریم، سوگند}، {ملیکا، سوگند}؛ تعداد آنها $\binom{۳}{۲}$ = ۳ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۹ صفحه ۱۵ کار در کلاس

۳. تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر پس از نشستن تاس روی زمین، عدد ۲ نمایان شود، به نظر شما در این آزمایش تصادفی کدام‌یک از پیشامدهای زیر رخ داده‌اند؟

الف) A = {۳, ۲, ۵}

ب) B = {۲}

پ) C = {۲, ۴, ۶}

برای اینکه یک پیشامد رخ دهد، کافی است یکی از برآمدهای آن در آزمایش به وقوع بپیوندد. چون برآمد ۲ در هر سه مجموعه وجود دارد، هر سه پیشامد A، B و C رخ داده‌اند.

۶۰ صفحه ۱۶ کار در کلاس

۴. دو تاس را پرتاب می‌کنیم؛ پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) اعداد رو شده از دو تاس مانند هم باشد.

{(۱, ۱), (۲, ۲), (۳, ۳), (۴, ۴), (۵, ۵), (۶, ۶)}

۶۱ صفحه ۱۶ کار در کلاس

۴. دو تاس را پرتاب می‌کنیم؛ پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

ب) مجموع اعداد برآمده از دو تاس برابر با ۷ باشد.

{(۱, ۶), (۲, ۵), (۳, ۴), (۴, ۳), (۵, ۲), (۶, ۱)} (۶ عضو)

۶۲ صفحه ۱۶ کار در کلاس

۴. دو تاس را پرتاب می‌کنیم؛ پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

پ) مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۱۳ باشد.

بیشترین مجموع ۶ + ۶ = ۱۲ است، پس چنین حالتی وجود ندارد: ∅ (پیشامد غیرممکن).

۶۳ صفحه ۱۶ کار در کلاس

۴. دو تاس را پرتاب می‌کنیم؛ پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

ت) حاصل ضرب اعداد برآمده از دو تاس کمتر از ۳۷ باشد.

بیشترین حاصل ضرب ۶ × ۶ = ۳۶ < ۳۷ است؛ پس هر ۳۶ حالت فضای نمونه در این پیشامد هستند: این پیشامد همان S و پیشامد حتمی است (n = ۳۶).

۶۴ صفحه ۱۶ کار در کلاس

۵. در یک برنامه‌ی کوهنوردی، ۵ دانش‌آموز سال دهم، ۶ دانش‌آموز سال یازدهم و ۴ دانش‌آموز سال دوازدهم شرکت دارند. قرار است یک گروه پیشتاز ۳ نفره از بین آنها برای صعود انتخاب کنیم. تعداد اعضای پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

الف) سه نفر دانش‌آموز پیشتاز از سه پایه‌ی مختلف باشند.

از هر پایه یک نفر: $n(A) = \binom{5}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{4}{1} = 5 \times 6 \times 4 = 120$

۶۵ صفحه ۱۶ **کار در کلاس**

۵. در یک برنامه‌ی کوهنوردی، ۵ دانش‌آموز سال دهم، ۶ دانش‌آموز سال یازدهم و ۴ دانش‌آموز سال دوازدهم شرکت دارند. قرار است یک گروه پیشتاز ۳ نفره از بین آنها برای صعود انتخاب کنیم. تعداد اعضای پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

ب) حداقل ۲ دانش‌آموز در این گروه پیشتاز از دانش‌آموزان سال یازدهم باشند.

یا ۲ نفر یازدهمی و ۱ نفر از ۹ نفر غیریازدهمی، یا ۳ نفر یازدهمی (اصل جمع):

$$\binom{6}{2} \times \binom{9}{1} + \binom{6}{3} = 15 \times 9 + 20 = 155$$

۶۶ صفحه ۱۷ **کار در کلاس**

۱. تاسی را پرتاب می‌کنیم؛ هر یک از پیشامدهای زیر را با اعضا مشخص کنید.

ـــ پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج و اول باشد.

ـــ پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج یا اول باشد.

ـــ پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج باشد ولی اول نباشد.

ـــ پیشامد اینکه عدد رو آمده اول باشد ولی زوج نباشد.

ـــ پیشامد اینکه عدد رو آمده اول نباشد.

زوج‌ها: {۲, ۴, ۶}؛ اول‌ها: {۲, ۳, ۵}.

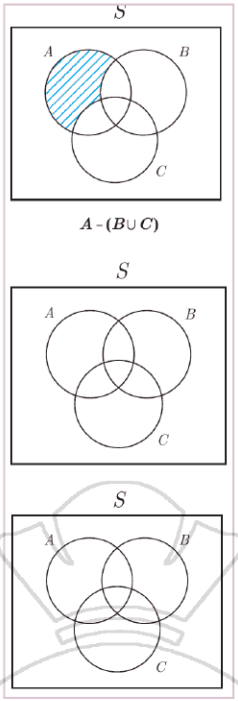
- زوج و اول (اشتراک): {۲}
- زوج یا اول (اجتماع): {۲, ۳, ۴, ۵, ۶}
- زوج ولی اول نباشد (تفاضل): {۴, ۶}
- اول ولی زوج نباشد (تفاضل): {۳, ۵}
- اول نباشد (متمم اول‌ها): {۱, ۴, ۶}

۶۷ صفحه ۱۸ **کار در کلاس**

۲. فرض کنید A و B و C سه پیشامد در فضای نمونه‌ی S باشند. هر یک از پیشامدهای زیر را روی نمودار ون سایه بزنید. سپس، عبارت مجموعه‌ای مربوط به هر پیشامد را مانند نمونه بنویسید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ـــ فقط پیشامد A رخ دهد و پیشامدهای B یا C رخ ندهد. (نمونه: (A – (B ∪ C)



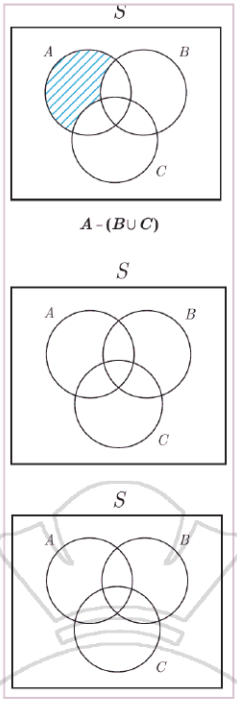
ناحیه‌ی A را برمی‌داریم و ناحیه‌های مشترک با B یا C را حذف می‌کنیم: (A – (B ∪ C (شکل نمونه‌ی کتاب).

۶۸ صفحه ۱۸ کار در کلاس

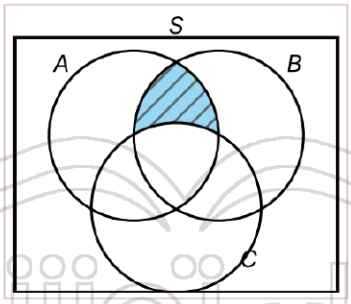
۲. فرض کنید A و B و C سه پیشامد در فضای نمونه‌ی S باشند. هر یک از پیشامدهای زیر را روی نمودار ون سایه بزنید. سپس، عبارت مجموعه‌ای مربوط به هر پیشامد را مانند نمونه بنویسید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ـــ پیشامدهای A و B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.



ناحیه‌ی مشترک A و B را می‌گیریم و بخشی از آن را که داخل C است حذف می‌کنیم: (A ∩ B) – C

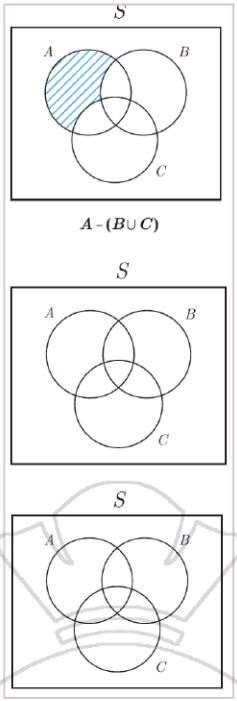


ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

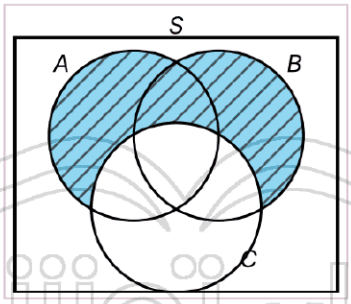
۶۹ صفحه ۱۸ کار در کلاس

۲. فرض کنید A و B و C سه پیشامد در فضای نمونه‌ی S باشند. هر یک از پیشامدهای زیر را روی نمودار ون سایه بزنید. سپس، عبارت مجموعه‌ای مربوط به هر پیشامد را مانند نمونه بنویسید.

ـــ پیشامدهای A یا B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.



اجتماع A و B را می‌گیریم و بخش داخل C را حذف می‌کنیم: (A ∪ B) – C



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۰ صفحه ۱۸ کار در کلاس

۳. خانواده‌ای صاحب ۳ فرزند است. پیشامدهای زیر را مشخص کنید. (پسر = پ، دختر = د؛ به ترتیب تولد فرزندان)

الف) پیشامد A اینکه همه‌ی فرزندان خانواده دارای یک جنسیت باشند.

فضای نمونه (۸ عضو): S = {ددد ,پدد ,دپد ,ددپ ,پپد ,پدپ ,دپپ ,پپپ}

A = {ددد ,پپپ}

۷۱ صفحه ۱۸ کار در کلاس

۳. خانواده‌ای صاحب ۳ فرزند است. پیشامدهای زیر را مشخص کنید. (پسر = پ، دختر = د؛ به ترتیب تولد فرزندان)

ب) پیشامد B اینکه دو فرزند خانواده پسر و یک فرزند دختر باشند.

B = {پ‌پد ,پ‌دپ ,دپپ}

۷۲ صفحه ۱۹ کار در کلاس

۳. خانواده‌ای صاحب ۳ فرزند است. پیشامدهای زیر را مشخص کنید. (پسر = پ، دختر = د؛ به ترتیب تولد فرزندان)

ج) پیشامد C اینکه حداقل دو فرزند این خانواده دختر باشند.

۲ دختر یا ۳ دختر: C = {ددد ,پ‌دد ,دپد ,ددپ}

۷۳ صفحه ۱۹ کار در کلاس

با توجه به پیشامدهای A و B و C (خانواده‌ی ۳ فرزندی) به سؤالات زیر پاسخ دهید:

آیا پیشامدهای A و B ناسازگارند؟

بله؛ A = {پپپ, ددد} و B = {پپد, پدپ, دپپ} عضو مشترک ندارند: $A \cap B = \emptyset$.

۷۴ صفحه ۱۹ کار در کلاس

با توجه به پیشامدهای A و B و C (خانواده‌ی ۳ فرزندی) به سؤالات زیر پاسخ دهید:

آیا پیشامدهای C و B ناسازگارند؟

بله؛ B دقیقاً یک دختر دارد ولی C حداقل دو دختر؛ هیچ عضو مشترکی ندارند: $B \cap C = \emptyset$.

۷۵ صفحه ۱۹ کار در کلاس

با توجه به پیشامدهای A و B و C (خانواده‌ی ۳ فرزندی) به سؤالات زیر پاسخ دهید:

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

آیا پیشامدهای C و A ناسازگارند؟

خیر؛ عضو «دد» هم در A و هم در C است: $A \cap C = \{دد\} \neq \emptyset$؛ پس A و C سازگارند.

۷۶ صفحه ۱۹ **کار در کلاس**

۴. دو پیشامد ناسازگار از یک آزمایش تصادفی را بنویسید.

پرتاب یک تاس: پیشامد «عدد زوج بیاید» $A = \{۲, ۴, ۶\}$ و پیشامد «عدد فرد بیاید» $B = \{۱, ۳, ۵\}$؛ چون $A \cap B = \emptyset$، ناسازگارند. (نمونه‌ی دیگر: در پرتاب سکه، {ر} و {پ}.)

۷۷ صفحه ۱۹ **فعالیت**

۱. چنانچه پیشامد A نشدنی باشد، یعنی $A = \emptyset$، در این صورت مقدار P(A) را محاسبه کنید.

$n(\emptyset) = ۰$؛ بنابراین $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۰}{n(S)} = ۰$

۷۸ صفحه ۱۹ **فعالیت**

۲. در حالتی که پیشامد A حتمی باشد، یعنی $A = S$، در این صورت مقدار P(A) را محاسبه کنید.

$P(A) = \frac{n(S)}{n(S)} = ۱$

۷۹ صفحه ۱۹ **فعالیت**

۳. هرگاه $A \subseteq B$، در این صورت جاهای خالی را پر کنید.

$A \subseteq B \Longrightarrow n(A) \leq \ldots \Longrightarrow n(A)/n(S) \leq \ldots/\ldots \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$

اگر A زیرمجموعه‌ی B باشد، هر عضو A در B هم هست، پس:

$$A \subseteq B \Rightarrow n(A) \leq n(B) \Rightarrow \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸۰ صفحه ۱۹ | فعالیت

۴. با توجه به ۱ و ۲ و ۳، اگر A پیشامد دلخواهی در فضای نمونه‌ی S باشد، در این صورت داریم: $0 \le P(A) \le 1$

برای هر پیشامد A داریم $\varnothing \subseteq A \subseteq S$؛ طبق ۳: $P(\varnothing) \le P(A) \le P(S)$ و طبق ۱ و ۲: $P(\varnothing) = 0$ و $P(S) = 1$. پس $0 \le P(A) \le 1$.

۸۱ صفحه ۱۹ | فعالیت

۵. هرگاه A و B دو پیشامد ناسازگار در فضای نمونه‌ی S باشند، با پر کردن جاهای خالی مقدار $P(A \cup B)$ را طبق اصل جمع پیدا کنید.

$P(A \cup B) \Longrightarrow n(A \cup B)/n(S) = n(A)/n(S) + \ldots \Longrightarrow n(A \cup B) = n(A) + \ldots = \ldots + \ldots$

چون $A \cap B = \varnothing$، اعضای A و B مشترک نیستند و طبق اصل جمع:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

۸۲ صفحه ۲۰ | کار در کلاس

۱. یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم؛ مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه:

الف) تاس زوج بیاید.

$n(S) = 12$؛ $A = \{(پ,2), (پ,4), (پ,6), (ر,2), (ر,4), (ر,6)\}$ و $n(A) = 6$:

$$P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

۸۳ صفحه ۲۰ | کار در کلاس

۱. یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم؛ مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه:

ب) سکه پشت بیاید.

عضوهای (پ, ۱) تا (پ, ۶): ۶ عضو؛ $P = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

۸۴ صفحه ۲۰ | کار در کلاس

۱. یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم؛ مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه:

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

پ) تاس زوج یا سکه رو بیاید.

تاس زوج: ۶ عضو؛ سکه رو: ۶ عضو؛ هر دو (ر با ۲، ۴، ۶): ۳ عضو که دو بار شمرده شده‌اند. پس $n(A \cup B) = ۶ + ۶ - ۳ = ۹$ (۳ عضو: (پ,۲)، (پ,۴)، (پ,۶) و ۶ عضو با «ر»).

$$P = \frac{۹}{۱۲} = \frac{۳}{۴}$$

۸۵ صفحه ۲۰ **کار در کلاس**

۱. یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم؛ مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه:

ت) تاس فرد و سکه پشت بیاید.

(پ,۱)، (پ,۳)، (پ,۵): ۳ عضو؛ $P = \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۴}$

۸۶ صفحه ۲۰ **کار در کلاس**

۲. یک تاکسی دارای ۵ سرنشین است؛ مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه:

الف) هر پنج نفر آنها در ماه فروردین متولد شده باشند. (هر یک از پنج نفر می‌توانند در هر یک از ۱۲ ماه سال به دنیا آمده باشند.)

هر نفر ۱۲ حالت دارد؛ طبق اصل ضرب $n(S) = ۱۲^۵$. برای A هر نفر فقط یک حالت (فروردین) دارد: $n(A) = ۱$.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱}{۱۲^۵}$$

۸۷ صفحه ۲۱ **کار در کلاس**

۲. یک تاکسی دارای ۵ سرنشین است؛ مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه:

ب) هر پنج نفر آنها در یک ماه از سال متولد شده باشند.

ماه مشترک را از ۱۲ ماه انتخاب می‌کنیم و بقیه تعیین‌شده‌اند: $n(A) = ۱۲$:

$$P(A) = \frac{۱۲}{۱۲^۵} = \frac{۱}{۱۲^۴} = \frac{۱}{۲۰۷۳۶}$$

۸۸ صفحه ۲۱ **کار در کلاس**

۲. یک تاکسی دارای ۵ سرنشین است؛ مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه:

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

پ) تولد هیچ دو تای آنها در یک ماه نباشد.

ماه تولد نفر اول ۱۲ انتخاب، دوم ۱۱، سوم ۱۰، چهارم ۹ و پنجم ۸: $n(A) = ۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹\times۸ = ۹۵۰۴۰$

$$P(A) = \frac{۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹\times۸}{۱۲^۵} = \frac{۹۵۰۴۰}{۲۴۸۸۳۲} = \frac{۵۵}{۱۴۴}$$

۸۹ صفحه ۲۱ کار در کلاس

۳. در یک بازی ۱۱ نفره، به هر شخصی یکی از شماره‌های ۲، ۳، ۴، ... و ۱۲ را نسبت می‌دهیم. سپس با پرتاب دو تاس و مجموع اعداد برآمده از آنها، نفر برنده مشخص می‌شود.

الف) احتمال برنده شدن چه شماره‌ای نسبت به بقیه بیشتر است؟

مجموع دو تاس، ۳۶ حالت هم‌شانس دارد. تعداد حالت‌های هر مجموع:

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالت	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

شماره‌ی ۷ با ۶ حالت: $P = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$ که از بقیه بیشتر است.

۹۰ صفحه ۲۱ کار در کلاس

۳. در یک بازی ۱۱ نفره، به هر شخصی یکی از شماره‌های ۲، ۳، ۴، ... و ۱۲ را نسبت می‌دهیم. سپس با پرتاب دو تاس و مجموع اعداد برآمده از آنها، نفر برنده مشخص می‌شود.

ب) احتمال برنده شدن کدام شماره‌ها از همه کمتر است؟

شماره‌های ۲ و ۱۲؛ هر کدام فقط ۱ حالت دارد ((۱,۱) و (۶,۶)): $P = \frac{۱}{۳۶}$

۹۱ صفحه ۲۱ کار در کلاس

۳. در یک بازی ۱۱ نفره، به هر شخصی یکی از شماره‌های ۲، ۳، ۴، ... و ۱۲ را نسبت می‌دهیم. سپس با پرتاب دو تاس و مجموع اعداد برآمده از آنها، نفر برنده مشخص می‌شود.

پ) آیا کسی که احتمال برنده شدنش کمتر است، ممکن است در این مسابقه برنده شود؟ چرا؟

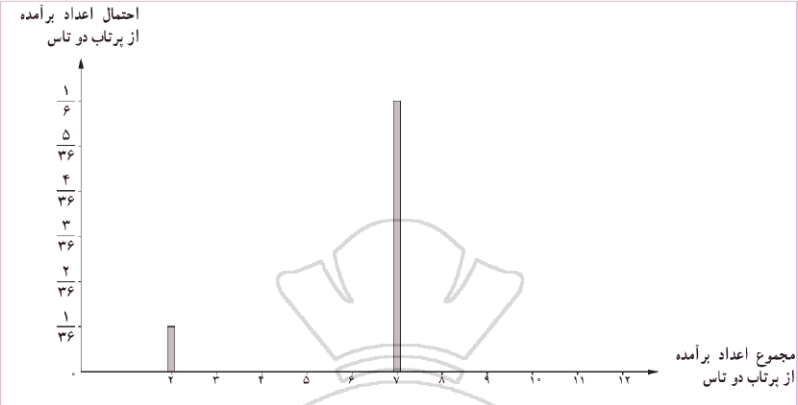
بله؛ احتمال کمتر به معنای غیرممکن بودن نیست. مثلاً شماره‌ی ۲ با احتمال $\frac{۱}{۳۶}$ باز هم ممکن است برنده شود، چون پدیده تصادفی است و نتیجه از پیش معلوم نیست (فقط پیشامد $\varnothing$ غیرممکن است).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

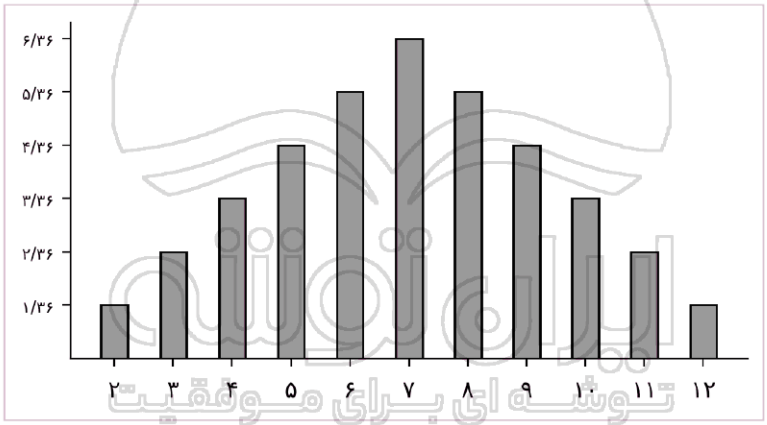
۹۲ صفحه ۲۱ کار در کلاس

۳. در یک بازی ۱۱ نفره، به هر شخصی یکی از شماره‌های ۲، ۳، ۴، ... و ۱۲ را نسبت می‌دهیم. سپس با پرتاب دو تاس و مجموع اعداد برآمده از آنها، نفر برنده مشخص می‌شود.

ت) در شکل زیر دستگاه مختصاتی رسم شده و روی محور افقی، مجموع اعداد برآمده از دو تاس و روی محور عمودی، احتمال متناظر با هر یک از آنها نوشته شده است. نمودار میله‌ای زیر را کامل کنید.



احتمال هر مجموع برابر (تعداد حالت)/۳۶ است: ۱/۳۶, ۲/۳۶, ۳/۳۶, ۴/۳۶, ۵/۳۶, ۶/۳۶, ۵/۳۶, ۴/۳۶, ۳/۳۶, ۲/۳۶, ۱/۳۶ برای مجموع‌های ۲ تا ۱۲. نمودار کامل:



۹۳ صفحه ۲۲ فعالیت

در جعبه‌ای ۳ مداد و ۵ خودکار وجود دارد. از این جعبه به‌طور تصادفی یک شیء خارج می‌کنیم. مطلوب است محاسبه‌ی:

الف) احتمال این را بیابید که شیء انتخابی مداد باشد؛ P(A).

$n(S) = ۸$: $P(A) = \frac{۳}{۸}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۹۴ صفحه ۲۲ **فعالیت**

در جعبه‌ای ۳ مداد و ۵ خودکار وجود دارد. از این جعبه به‌طور تصادفی یک شیء خارج می‌کنیم. مطلوب است محاسبه‌ی:

ب) احتمال این را بیابید که شیء انتخابی خودکار باشد؛ P(B).

$P(B) = \frac{۵}{۸}$

۹۵ صفحه ۲۲ **فعالیت**

در جعبه‌ای ۳ مداد و ۵ خودکار وجود دارد. از این جعبه به‌طور تصادفی یک شیء خارج می‌کنیم. مطلوب است محاسبه‌ی:

پ) احتمال این را بیابید که شیء انتخاب شده مداد نباشد؛ $P(A')$.

مداد نبودن یعنی خودکار بودن: $P(A') = \frac{۵}{۸}$

۹۶ صفحه ۲۲ **فعالیت**

در جعبه‌ای ۳ مداد و ۵ خودکار وجود دارد. از این جعبه به‌طور تصادفی یک شیء خارج می‌کنیم. مطلوب است محاسبه‌ی:

ت) پاسخ‌های قسمت‌های ب و پ را با هم مقایسه کنید؛ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$P(B) = P(A') = ۵/۸$. چون در این جعبه فقط مداد و خودکار هست، «مداد نباشد» و «خودکار باشد» یک پیشامداند: $B = A'$.

۹۷ صفحه ۲۲ **فعالیت**

در جعبه‌ای ۳ مداد و ۵ خودکار وجود دارد. از این جعبه به‌طور تصادفی یک شیء خارج می‌کنیم. مطلوب است محاسبه‌ی:

ث) حاصل $P(A') + P(A)$ را پیدا کنید.

$P(A) + P(A') = \frac{۳}{۸} + \frac{۵}{۸} = ۱$؛ یعنی $P(A') = ۱ - P(A)$.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۹۸ صفحه ۲۳ کار در کلاس

۱. احتمال اینکه فردا بارانی باشد برابر با ۱/۱۰ است. مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه فردا بارانی نباشد.

$$P(A') = ۱ - P(A) = ۱ - \frac{۱}{۱۰} = \frac{۹}{۱۰}$$

۹۹ صفحه ۲۳ کار در کلاس

۲. احتمال اینکه کیارش فردا به مدرسه نرود برابر با ۰/۰۱ است. مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه فردا کیارش به مدرسه برود.

$P = ۱ - ۰.۰۱ = ۰.۹۹$ (یعنی ۰/۹۹)

۱۰۰ صفحه ۲۳ کار در کلاس

۳. احتمال اینکه ریحانه امشب سریال شبکه‌ی یک سیما را تماشا نکند برابر با ۳۲/۴۹ است، مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه ریحانه امشب سریال را تماشا کند.

$$P = ۱ - \frac{۳۲}{۴۹} = \frac{۴۹ - ۳۲}{۴۹} = \frac{۱۷}{۴۹}$$

۱۰۱ صفحه ۲۵ تمرین

۱. کدام‌یک از پدیده‌های زیر آزمایش تصادفی و کدام‌یک آزمایش قطعی است؟

الف) نام ۲۰ دانش‌آموز را روی ۲۰ کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، به‌طور تصادفی یک کارت بیرون می‌کشیم تا نام یکی از دانش‌آموزها استخراج شود.

تصادفی؛ کارت خارج‌شده از پیش معلوم نیست.

۱۰۲ صفحه ۲۵ تمرین

۱. کدام‌یک از پدیده‌های زیر آزمایش تصادفی و کدام‌یک آزمایش قطعی است؟

ب) مقداری آب را حرارت می‌دهیم تا به بخار تبدیل شود.

قطعی؛ نتیجه (تبدیل به بخار) از پیش مشخص است.

۱۰۳ صفحه ۲۵ تمرین

۱. کدام‌یک از پدیده‌های زیر آزمایش تصادفی و کدام‌یک آزمایش قطعی است؟

پ) نتیجه‌ی یک آزمون چهارجوابی، که نیمی از سؤالات آن را شانسی پاسخ داده‌ایم.

تصادفی؛ درست یا غلط بودن پاسخ‌های شانسی از پیش معلوم نیست.

۱۰۴ صفحه ۲۵ تمرین

۱. کدام‌یک از پدیده‌های زیر آزمایش تصادفی و کدام‌یک آزمایش قطعی است؟

ت) در یک بازی ساده‌ی دو نفره، یکی از دو نفر مراحل زیر را انجام می‌دهد: ــ عددی را انتخاب می‌کند. ــ سه واحد به آن عدد می‌افزاید. ــ سپس حاصل را دو برابر می‌کند. ــ از عدد حاصل ۲ واحد کم می‌کند. ــ نتیجه‌ی به دست آمده را نصف می‌کند. ــ از حاصل به دست آمده، عدد اولیه را کم می‌کند. ــ در مرحله‌ی آخر، فرد دوم به جای شخص محاسبه‌کننده پاسخ را اعلام می‌کند.

قطعی؛ اگر عدد اولیه x باشد:

$$\frac{۲(x+۳)-۲}{۲} - x = \frac{۲x+۴}{۲} - x = x + ۲ - x = ۲$$

جواب همیشه ۲ است و به عدد انتخابی بستگی ندارد؛ پس فرد دوم از پیش می‌داند و نتیجه قطعی است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۰۵ صفحه ۲۵ تمرین

۲. سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو ظاهر شد، آن‌گاه تاس را می‌ریزیم. در غیر این صورت، یک بار دیگر سکه را می‌اندازیم.

الف) فضای نمونه‌ی این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

اگر سکه رو بیاید، تاس ۶ حالت دارد؛ اگر پشت بیاید، سکه‌ی دوم ۲ حالت دارد:

$S = \{(ر,۱), (ر,۲), (ر,۳), (ر,۴), (ر,۵), (ر,۶), (پ,ر), (پ,پ)\}$

$n(S) = ۸$

۱۰۶ صفحه ۲۵ تمرین

۲. سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو ظاهر شد، آن‌گاه تاس را می‌ریزیم. در غیر این صورت، یک بار دیگر سکه را می‌اندازیم.

ب) پیشامد A را که در آن عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت بیاید، با اعضا مشخص کنید.

تاس زوج: (ر,۲)، (ر,۴)، (ر,۶)؛ پشت آمدن سکه: (پ,ر) و (پ,پ):

A = {(ر,۲), (ر,۴), (ر,۶), (ر,پ), (پ,پ)}

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۰۷ صفحه ۲۵ تمرین

۳. هر یک از اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به‌طور تصادفی یک کارت را برمی‌داریم؛ مطلوب است تعیین:

الف) فضای نمونه‌ی این آزمایش تصادفی

S = {۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ۱۳, ۱۵, ۱۷, ۱۹}

۱۰۸ صفحه ۲۵ تمرین

۳. هر یک از اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به‌طور تصادفی یک کارت را برمی‌داریم؛ مطلوب است تعیین:

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.

A = {۳, ۹, ۱۵}

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۰۹ صفحه ۲۵ تمرین

۳. هر یک از اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به‌طور تصادفی یک کارت را برمی‌داریم؛ مطلوب است تعیین:

پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت، مجذور کامل باشد.

B = {۱, ۹} (۱ = $۱^۲$، ۹ = $۳^۲$؛ ۴ و ۱۶ فرد نیستند)

۱۱۰ صفحه ۲۵ تمرین

۳. هر یک از اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به‌طور تصادفی یک کارت را برمی‌داریم؛ مطلوب است تعیین:

ت) پیشامدهای $A \cap B$ و $A - B$ را با اعضا مشخص کنید.

$A \cap B = \{۹\}$ و $A - B = \{۳, ۱۵\}$

۱۱۱ صفحه ۲۵ تمرین

۴. برای هر یک از پیشامدهای زیر یک عبارت توصیفی و یک عبارت مجموعه‌ای بنویسید.

(الف)

صف می‌کند.

، عدد اوّلیه را کم می‌کند.

به جای شخص محاسبه‌کننده پاسخ را اعلام می‌کند.

نیم. اگر رو ظاهر شد، آن‌گاه تاس را می‌ریزیم. در غیر این صورت، یک‌بار دیگر سک

ایش تصادفی را مشخص کنید.

عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت بیاید، با اعضا مشخص کنید.

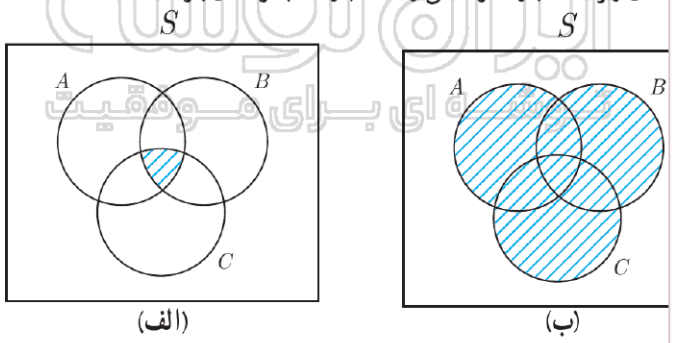
طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت

مطلوب است تعیین:

ایش تصادفی ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضر

د روی کارت، مجذور کامل باشد. ت) پیشامدهای $A \cap B$ و $A - B$ را با اعضا

های زیر یک عبارت توصیفی و یک عبارت مجموعه‌ای بنویسید.



(الف) (ب)

ناحیه‌ی سایه‌خورده در داخل هر سه دایره است: عبارت توصیفی: «هر سه پیشامد A و B و C رخ دهند»؛ عبارت مجموعه‌ای: $A \cap B \cap C$

۱۱۲ صفحه ۲۵ تمرین

۴. برای هر یک از پیشامدهای زیر یک عبارت توصیفی و یک عبارت مجموعه‌ای بنویسید.

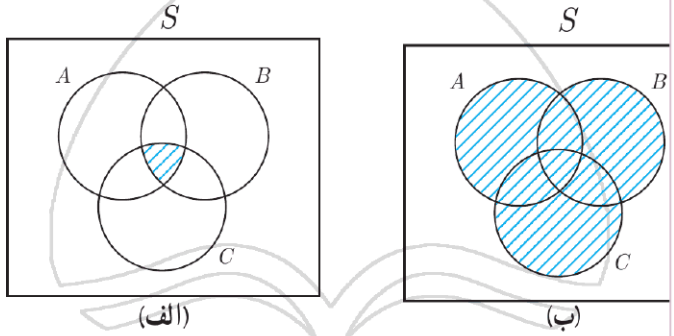
(ب)

صف می‌کند.
، عدد اوّلیه را کم می‌کند.
به جای شخص محاسبه‌کننده پاسخ را اعلام می‌کند.

نیم. اگر رو ظاهر شد، آن‌گاه تاس را می‌ریزیم. در غیر این صورت، یک‌بار دیگر سک
ایش تصادفی را مشخص کنید.
عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت بیاید، با اعضا مشخص کنید.

طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت
مطلوب است تعیین :
ایش تصادفی ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضر
د روی کارت، مجذور کامل باشد. ت) پیشامدهای $A\cap B$ و $A-B$ را با اعضا

های زیر یک عبارت توصیفی و یک عبارت مجموعه‌ای بنویسید.



هر سه دایره به طور کامل سایه خورده است: عبارت توصیفی: «حداقل یکی از پیشامدهای A یا B یا C رخ دهد»؛

عبارت مجموعه‌ای: $A \cup B \cup C$

۱۱۳ صفحه ۲۶ تمرین

۵. هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۴، ۳، ۲، ۱ می‌توان نوشت، روی کارت‌هایی می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یک کارت را به‌طور تصادفی خارج می‌کنیم.

الف) فضای نمونه‌ی این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

رقم دهگان ۴ انتخاب و رقم یکان ۴ انتخاب (تکرار مجاز است): ۱۶ عدد.

$S = \{11,12,13,14,21,22,23,24,31,32,33,34,41,42,43,44\}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۱۴ صفحه ۲۶ تمرین

۵. هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۴، ۳، ۲، ۱ می‌توان نوشت، روی کارت‌هایی می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یک کارت را به‌طور تصادفی خارج می‌کنیم.

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۶ باشد.

$A = \{۱۲, ۲۴, ۴۲\}$

۱۱۵ صفحه ۲۶ تمرین

۵. هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۴، ۳، ۲، ۱ می‌توان نوشت، روی کارت‌هایی می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یک کارت را به‌طور تصادفی خارج می‌کنیم.

پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول باشد.

$B = \{۱۱, ۱۳, ۲۳, ۳۱, ۴۱, ۴۳\}$

۱۱۶ صفحه ۲۶ تمرین

۶. خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. (پسر = پ، دختر = د؛ به ترتیب تولد)

الف) فضای نمونه‌ی مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چیست؟

S = {ددد, پدد, دپد, ددپ, پپد, پدپ, دپپ, پپپ} (۲ × ۲ × ۲ = ۸ عضو)

۱۱۷ صفحه ۲۶ تمرین

۶. خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. (پسر = پ، دختر = د؛ به ترتیب تولد)

ب) پیشامد A که در آن هر سه فرزند از یک جنس باشند.

A = {ددد, پپپ}

۱۱۸ صفحه ۲۶ تمرین

۶. خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. (پسر = پ، دختر = د؛ به ترتیب تولد)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

پ) پیشامد B که در آن فقط یک فرزند دختر باشد.

B = {پ‌پد ,پ‌دپ ,دپپ}

۱۱۹ صفحه ۲۶ تمرین

۶. خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. (پسر = پ، دختر = د؛ به ترتیب تولد)

ت) پیشامد C که در آن حداقل ۲ فرزند پسر باشند.

C = {پ‌پد ,پ‌دپ ,دپپ ,پ‌پپ}

۱۲۰ صفحه ۲۶ تمرین

۶. خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. (پسر = پ، دختر = د؛ به ترتیب تولد)

ث) پیشامد D که در آن حداکثر یک فرزند پسر باشد.

D = {پ‌دد ,دپد ,ددپ ,ددد}

۱۲۱ صفحه ۲۶ تمرین

۷. خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است.

الف) فضای نمونه برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چند عضو دارد؟

هر فرزند ۲ حالت دارد: ۱۶ = ۲ × ۲ × ۲ × ۲

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲۲ صفحه ۲۶ تمرین

۷. خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است.

ب) پیشامد A را مشخص کنید، طوری که در آن دو فرزند سوم و چهارم دختر باشند.

فرزندان اول و دوم هر کدام ۲ حالت دارند: A = {ددد ,دپد ,ددپ ,دپپ} (۴ عضو)

۱۲۳ صفحه ۲۶ تمرین

۷. خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است.

پ) پیشامد C که در آن تعداد فرزندان دختر بیشتر از تعداد فرزندان پسر باشد.

۳ دختر و ۱ پسر (۴ حالت) یا ۴ دختر (۱ حالت):

C = {ددد, پدد, دپد, ددپ} (۵ عضو)

۱۲۴ صفحه ۲۶ تمرین

۷. خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است.

ت) آیا پیشامدهای A و C ناسازگارند؟

خیر؛ مثلاً «پدد» هم در A و هم در C است (و «دپد» و «ددد» نیز): $A \cap C \neq \varnothing$. پس A و C سازگارند.

۱۲۵ صفحه ۲۶ تمرین

۸. از جعبه‌ای که شامل ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب لکه‌دار است، ۳ سیب را به‌طور تصادفی برمی‌داریم. مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه:

الف) هر سه سیب سالم باشد.

ابتدا $n(S) = \binom{۱۷}{۳} = ۶۸۰$.

$$P = \frac{\binom{۱۲}{۳}}{\binom{۱۷}{۳}} = \frac{۲۲۰}{۶۸۰} = \frac{۱۱}{۳۴}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲۶ صفحه ۲۶ تمرین

۸. از جعبه‌ای که شامل ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب لکه‌دار است، ۳ سیب را به‌طور تصادفی برمی‌داریم. مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه:

ب) دو سیب سالم و یک سیب لکه‌دار باشد.

ابتدا $n(S) = \binom{۱۷}{۳} = ۶۸۰$.

$$P = \frac{\binom{۱۲}{۲} \times \binom{۵}{۱}}{\binom{۱۷}{۳}} = \frac{۶۶ \times ۵}{۶۸۰} = \frac{۳۳۰}{۶۸۰} = \frac{۳۳}{۶۸}$$

۱۲۷ صفحه ۲۶ تمرین

۸. از جعبه‌ای که شامل ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب لکه‌دار است، ۳ سیب را به‌طور تصادفی برمی‌داریم. مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه:

پ) تعداد سیب‌های سالم از تعداد سیب‌های لکه‌دار بیشتر باشد.

ابتدا $n(S) = \binom{۱۷}{۳} = ۶۸۰$. باید ۳ سالم یا ۲ سالم و ۱ لکه‌دار باشد (اصل جمع):

$$P = \frac{۲۲۰ + ۳۳۰}{۶۸۰} = \frac{۵۵۰}{۶۸۰} = \frac{۵۵}{۶۸}$$

۱۲۸ صفحه ۲۶ تمرین

۹. عقربه‌ی دستگاه چرخنده‌ی زیر، پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه می‌ایستد و عددی را نشان می‌دهد. چقدر احتمال دارد که:

الف) عقربه روی یک عدد اول بایستد.



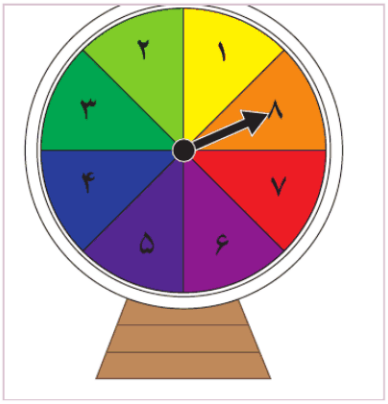
عددهای اول: ۲، ۳، ۵، ۷ (۴ عدد از ۸): $P = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲۹ صفحه ۲۶ تمرین

۹. عقربه‌ی دستگاه چرخنده‌ی زیر، پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه می‌ایستد و عددی را نشان می‌دهد. چقدر احتمال دارد که:

ب) عقربه یک عدد اول یا فرد را نشان دهد.

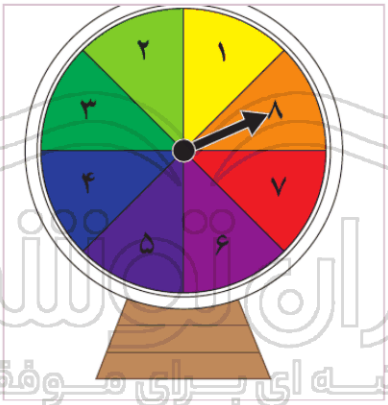


اول: {۲,۳,۵,۷}؛ فرد: {۱,۳,۵,۷}؛ اجتماع: {۱,۲,۳,۵,۷} با ۵ عضو: $P = \frac{۵}{۸}$

۱۳۰ صفحه ۲۶ **تمرین**

۹. عقربه‌ی دستگاه چرخنده‌ی زیر، پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه می‌ایستد و عددی را نشان می‌دهد. چقدر احتمال دارد که:

پ) عقربه روی یک عدد مضرب ۳ بایستد.



مضرب‌های ۳: ۳ و ۶: $P = \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۳۱ صفحه ۲۶ تمرین

۱۰. ۷ پرچم مختلف را به هفت میله‌ی پرچم نصب کرده‌ایم و روی میله‌ها شماره‌های ۱ تا ۷ را حک کرده‌ایم. چنانچه این پرچم‌ها به‌طور تصادفی کنار هم قرار گیرند، مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه میله‌ی پرچم‌ها با شماره‌های غیر اول در مکان‌های زوج باشند.

تعداد کل ترتیب‌ها: $n(S) = ۷!$. شماره‌های غیر اول: ۱، ۴، ۶ (۳ میله) و مکان‌های زوج: ۲، ۴، ۶ (۳ مکان). این سه میله در ۳! حالت در مکان‌های زوج و ۴ میله‌ی دیگر در ۴! حالت در بقیه قرار می‌گیرند:

$$P = \frac{۳! \times ۴!}{۷!} = \frac{۶ \times ۲۴}{۵۰۴۰} = \frac{۱}{۳۵}$$

۱۳۲ صفحه ۲۶ تمرین

۱۱. یازده بازیکن فوتبال تیم مدرسه‌ی شما به‌طور تصادفی کنار یکدیگر قرار می‌گیرند تا عکسی یادگاری بیندازند. چنانچه دروازه‌بان و کاپیتان دو نفر متفاوت باشند، مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه در عکس دقیقاً ۴ نفر بین دروازه‌بان و کاپیتان حضور داشته باشند؟

$n(S) = ۱۱!$. اگر دروازه‌بان و کاپیتان دقیقاً ۴ نفر فاصله داشته باشند، شماره‌ی جایگاهشان ۵ واحد تفاوت دارد: (۱,۶)، (۲,۷)، ... ، (۶,۱۱): ۶ زوج مکان و برای هر زوج ۲ حالت جابه‌جایی بین دو نفر؛ ۹ نفر دیگر در ۹! حالت قرار می‌گیرند:

$$P = \frac{۶ \times ۲ \times ۹!}{۱۱!} = \frac{۱۲}{۱۱ \times ۱۰} = \frac{۶}{۵۵}$$

۱۳۳ صفحه ۲۷ تمرین

۱۲. در یک پارک جنگلی حفاظت‌شده، ۲۰ قوچ وحشی البرز مرکزی وجود دارد؛ ۵ تا از آنها را قبل از نشان‌دار کردن، و پس از آن رهایشان می‌کنند. بعد از مدتی، محیط‌بانان به‌طور تصادفی ۷ تا از آنها را می‌گیرند و می‌خواهند تعداد قوچ‌های نشان‌دار را بشمارند. مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه حداکثر ۲ قوچ نشان‌دار باشند.

$n(S) = \binom{۲۰}{۷} = ۷۷۵۲۰$؛ حداکثر ۲ نشان‌دار یعنی ۰ یا ۱ یا ۲ نشان‌دار (اصل جمع):

$$n(A) = \binom{۵}{۰}\binom{۱۵}{۷} + \binom{۵}{۱}\binom{۱۵}{۶} + \binom{۵}{۲}\binom{۱۵}{۵} = ۶۴۳۵ + ۲۵۰۲۵ + ۳۰۰۳۰ = ۶۱۴۹۰$$

$$P(A) = \frac{۶۱۴۹۰}{۷۷۵۲۰} = \frac{۶۱۴۹}{۷۷۵۲} \approx ۰.۷۹$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۳۴ صفحه ۲۷ تمرین

۱۳. انجمن اولیا و مربیان یک دبیرستان ۱۰ نفر عضو دارد؛ به یک برنامه‌ی خاص، ۵ نفر رأی موافق، ۳ نفر رأی مخالف و ۲ نفر رأی ممتنع داده‌اند. از بین آنها ۳ نفر انتخاب می‌کنیم؛ مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه:
الف) حداقل ۲ نفر از افراد انتخابی موافق برنامه باشند.

$n(S) = \binom{۱۰}{۳} = ۱۲۰$؛ ۲ موافق و ۱ غیرموافق، یا ۳ موافق:

$$P = \frac{\binom{۵}{۲}\binom{۵}{۱} + \binom{۵}{۳}}{۱۲۰} = \frac{۵۰ + ۱۰}{۱۲۰} = \frac{۱}{۲}$$

۱۳۵ صفحه ۲۷ تمرین

۱۳. انجمن اولیا و مربیان یک دبیرستان ۱۰ نفر عضو دارد؛ به یک برنامه‌ی خاص، ۵ نفر رأی موافق، ۳ نفر رأی مخالف و ۲ نفر رأی ممتنع داده‌اند. از بین آنها ۳ نفر انتخاب می‌کنیم؛ مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه:
ب) نظر هیچ دو نفری از آنها مانند هم نباشد.

از هر دسته (موافق، مخالف، ممتنع) یک نفر:

$$P = \frac{۵ \times ۳ \times ۲}{۱۲۰} = \frac{۳۰}{۱۲۰} = \frac{۱}{۴}$$

۱۳۶ صفحه ۲۷ خواندنی

در یک مسابقه، سه دریچه مطابق شکل زیر در مقابل یک شرکت‌کننده قرار دارد. ناگهان یک دریچه به‌طور تصادفی باز می‌شود و توپی از آن به طرف شرکت‌کننده پرتاب می‌شود. اگر این فرد بتواند توپ را بگیرد، برنده است و در غیر این صورت، بازنده می‌شود. به نظر شما، احتمال پرتاب توپ از هر دریچه چقدر است؟

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

اگر یک دریچه را غیرفعال کنند و شرکت‌کننده شماره‌ی دریچه‌ی غیرفعال را نداند، در این صورت احتمال پرتاب توپ از هر دریچه برای شرکت‌کننده در مسابقه چقدر است؟



دریچه به‌طور تصادفی باز می‌شود و سه دریچه شانس برابر دارند: $P = \frac{۱}{۳}$ برای هر دریچه.

اگر یک دریچه غیرفعال باشد، توپ از آن پرتاب نمی‌شود و فقط از دو دریچه‌ی دیگر که شانس برابر دارند پرتاب می‌شود: احتمال هر یک از دو دریچه‌ی فعال $\frac{۱}{۲}$ و برای دریچه‌ی غیرفعال ۰ است؛ اما چون شرکت‌کننده شماره‌ی دریچه‌ی غیرفعال را نمی‌داند، از دید او هر دریچه می‌تواند باشد و برای او احتمال هر دریچه همچنان $\frac{۱}{۳}$ است.

۱۳۷ صفحه ۲۹ **فعالیت**

حدس می‌زنید دانش‌آموزان کلاس شما به‌طور متوسط روزانه چقدر و برای چه فعالیت‌هایی از تلفن‌های هوشمند خود استفاده می‌کنند؟

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

این پرسش حدس و نظر شخصی است و پاسخ دقیق ندارد؛ نمونه‌ی یک پاسخ: «به‌طور متوسط حدود ۷۰ تا ۹۰ دقیقه در روز؛ بیشتر برای شبکه‌های اجتماعی، تماشای فیلم یا گوش دادن به موسیقی و عکاسی.»

حدس خود را بنویسید و در پایان، با نتایج واقعی پرسشنامه‌ی کلاس مقایسه کنید (همان‌طور که در متن آمده، حدس زدن قبل از گردآوری داده، مرحله‌ی «بیان مسئله» را روشن‌تر می‌کند).

۱۳۸ صفحه ۲۹ فعالیت

در این پرسشنامه لازم نیست افراد نام خود را بنویسند. حفظ محرمانگی اطلاعات، چگونه کمک می‌کند داده‌های گردآوری شده به واقعیت نزدیک‌تر باشند؟ مثال دیگری بزنید که حفظ محرمانگی اطلاعات هنگام گردآوری داده‌ها مهم باشد.

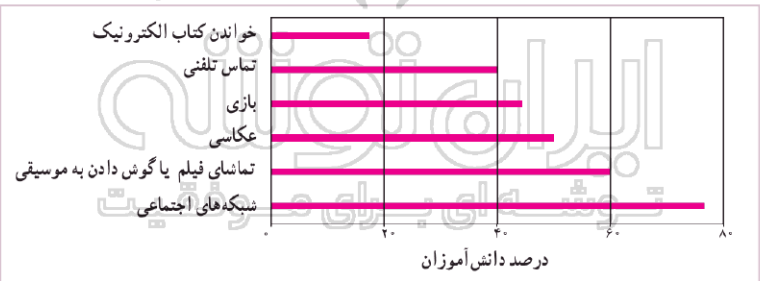
وقتی نام افراد نوشته نشود، آن‌ها نگران قضاوت یا پیامد پاسخ خود نیستند (مثلاً از زیاد بودن زمان استفاده از تلفن یا انجام کارهای ناپسند خجالت نمی‌کشند) و پاسخ‌های صادقانه‌تر و دقیق‌تری می‌دهند؛ در نتیجه داده‌ها به واقعیت نزدیک‌ترند.

مثال دیگر: نظرسنجی از کارمندان یک اداره درباره‌ی رضایت از مدیر؛ پرسش درباره‌ی میزان درآمد خانواده؛ یا پرسش از دانش‌آموزان درباره‌ی میزان تقلب در امتحان یا مصرف دخانیات. در همه‌ی این موارد، اگر هویت افراد فاش شود، پاسخ‌ها غیرواقعی خواهد بود.

۱۳۹ صفحه ۲۹ فعالیت

نتایج این نظرسنجی درباره‌ی فعالیت‌های انجام شده با تلفن هوشمند به صورت نمودار میله‌ای زیر گزارش شد. در نمونه‌ی مورد بررسی، میانه‌ی میزان استفاده از تلفن هوشمند ۷۰ دقیقه و دامنه‌ی میان‌چارکی آن ۳۵ ($Q_1 = ۶۵$, $Q_3 = ۱۰۰$) دقیقه بود.

با توجه به چارک‌های گزارش شده، (تقریباً) چند درصد از دانش‌آموزان به طور متوسط بیش از ۱۰۰ دقیقه در روز با تلفن هوشمند خود کار می‌کنند؟



مقدار ۱۰۰ دقیقه برابر چارک سوم (Q_3) است. چارک سوم یعنی ۷۵٪ داده‌ها از آن کمتر یا مساوی‌اند؛ پس حدود ۲۵٪ داده‌ها بیشتر از آن‌اند.

پاسخ: تقریباً ۲۵ درصد از دانش‌آموزان روزانه بیش از ۱۰۰ دقیقه با تلفن هوشمند خود کار می‌کنند.

۱۴۰ صفحه ۲۹ فعالیت

چرا در این نمودار میله‌ای، مجموع درصد فراوانی‌ها از ۱۰۰ بیشتر می‌شود؟



در پرسش (ب) از هر دانش‌آموز خواسته شده بود سه فعالیت را علامت بزند؛ یعنی هر نفر در سه میله شمرده می‌شود و پاسخ‌ها مستقل از هم نیستند.

به همین دلیل مجموع درصدها تقریباً ۳ × ۱۰۰ = ۳۰۰ می‌شود (با مقدارهای تقریبی نمودار: ۷۷ + ۶۰ + ۵۰ + ۴۴ + ۴۰ + ۱۷ ≈ ۲۸۸٪) و کمتر از ۱۰۰ نیست. هر درصد، سهم افرادی است که آن فعالیت را انتخاب کرده‌اند، نه سهمی از کل پاسخ‌ها.

۱۴۱ صفحه ۳۰ فعالیت

باید توجه داشته باشیم که این نتایج فقط در مورد دانش‌آموزان پایه‌های ..... این مدرسه (نه دانش‌آموزان دیگر مدارس) و فقط در مورد چگونگی استفاده از ..... (نه ابزارهای دیگر) صادق است.

اولین جای خالی: دهم، یازدهم و دوازدهم (دانش‌آموزان متوسطه‌ی دوم)؛ این همان جامعه‌ای است که نمونه از آن انتخاب شد.

دومین جای خالی: تلفن‌های هوشمند.

دلیل: نتایج یک نمونه فقط به جامعه‌ی آماری‌ای که نمونه از آن گرفته شده تعمیم داده می‌شود.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۴۲ صفحه ۳۰ فعالیت

با توجه به نمودار میله‌ای صفحه‌ی قبل، دانش‌آموزان متوسطه‌ی دوم این مدرسه بیشتر برای انجام دادن چه فعالیت‌هایی از تلفن هوشمند خود استفاده می‌کنند؟



میله‌های بلندتر، فعالیت‌هایی‌اند که درصد بیشتری از دانش‌آموزان انتخاب کرده‌اند:

1. شبکه‌های اجتماعی (حدود ۷۷٪)
2. تماشای فیلم یا گوش دادن به موسیقی (حدود ۶۰٪)
3. عکاسی (حدود ۵۰٪)

پاسخ: بیشتر برای شبکه‌های اجتماعی، سپس تماشای فیلم یا گوش دادن به موسیقی و بعد عکاسی. کمترین استفاده برای خواندن کتاب الکترونیک است (حدود ۱۷٪).

۱۴۳ صفحه ۳۰ فعالیت

از میانه و دامنه‌ی میان‌چارکی گزارش شده برای زمان استفاده‌ی روزانه از تلفن‌های هوشمند چه نتیجه‌ای می‌گیرید یا به زبان آماری، آن‌ها را چگونه تفسیر می‌کنید؟

میانه = ۷۰ دقیقه: نیمی از دانش‌آموزان نمونه روزانه حداکثر ۷۰ دقیقه و نیمی دیگر حداقل ۷۰ دقیقه از تلفن هوشمند خود استفاده می‌کنند.

چارک اول Q۱ = ۶۵ و چارک سوم Q۳ = ۱۰۰؛ دامنه‌ی میان‌چارکی = Q۳ − Q۱ = ۱۰۰ − ۶۵ = ۳۵ دقیقه: ۵۰٪ میانی داده‌ها (از ۶۵ تا ۱۰۰ دقیقه) در بازه‌ای به طول ۳۵ دقیقه پخش شده‌اند؛ یعنی ۲۵٪ دانش‌آموزان کمتر از ۶۵ دقیقه و ۲۵٪ بیش از ۱۰۰ دقیقه استفاده می‌کنند.

چون میانه و دامنه‌ی میان‌چارکی به داده‌های دورافتاده حساس نیستند، برای توصیف این داده‌ها (که ممکن است دانش‌آموزانی با ساعت‌های بسیار زیاد داشته باشند) مناسب‌اند.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۴۴ صفحه ۳۱ کار در کلاس

اکنون که چرخه‌ی حل مسئله را می‌شناسیم، می‌توانیم در جدول زیر نام هر گام و ترتیب آن را مقابل توضیحاتش بنویسیم. (مشاهده‌ی نمونه‌ی حل‌شده در سطر سوم می‌تواند به ما کمک کند.)

ترتیب گام	نام گام	توضیح گام
		راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می‌کنیم. به نمونه‌گیری، شیوه‌ی اندازه‌گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم.
		نتایج به‌دست‌آمده را تفسیر می‌کنیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می‌کنیم.
۱	بیان مسئله	مسئله‌ای را که در دنیای واقعی وجود دارد، به‌صورت یک مسئله‌ی شفاف و دقیق آماری مطرح می‌کنیم.
		با استفاده از معیارها، نمودارها و مفاهیمی که آموخته‌ایم، نتایج را متناسب با هدف‌های کارمان، نوع متغیرها و ویژگی‌های داده‌ها گزارش می‌کنیم.
		داده‌ها را گردآوری می‌کنیم و تا حد ممکن از درستی آن‌ها مطمئن می‌شویم.

ترتیب گام	نام گام	توضیح گام
۲	طرح و برنامه‌ریزی	راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می‌کنیم؛ به نمونه‌گیری، شیوه‌ی اندازه‌گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم.
۵	بحث و نتیجه‌گیری	نتایج به‌دست‌آمده را تفسیر می‌کنیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می‌کنیم.
۱	بیان مسئله	مسئله‌ای را که در دنیای واقعی وجود دارد، به‌صورت یک مسئله‌ی شفاف و دقیق آماری مطرح می‌کنیم. (نمونه‌ی حل‌شده)
۴	تحلیل داده‌ها	با استفاده از معیارها، نمودارها و مفاهیمی که آموخته‌ایم، نتایج را متناسب با هدف‌های کارمان، نوع متغیرها و ویژگی‌های داده‌ها گزارش می‌کنیم.
۳	داده‌ها (گردآوری و پاک‌سازی)	داده‌ها را گردآوری می‌کنیم و تا حد ممکن از درستی آن‌ها مطمئن می‌شویم.

ترتیب گام‌های چرخه: ۱) بیان مسئله، ۲) طرح و برنامه‌ریزی، ۳) گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها، ۴) تحلیل داده‌ها، ۵) بحث و نتیجه‌گیری.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۴۵ صفحه ۳۲ بحث و گفت‌وگو

چند مثال دیگر بزنید.

مسئله‌ی آماری باید جامعه‌ی محدود و هدف دقیق داشته باشد. چند مثال:

- بررسی میانگین ساعت مطالعه‌ی هفتگی دانش‌آموزان پایه‌ی دوازدهم یک مدرسه‌ی مشخص در دوره‌ی امتحانات
- بررسی میانگین زمان رفت‌وآمد روزانه‌ی کارمندان یک اداره‌ی مشخص در تهران
- بررسی میزان رضایت مشتریان یک فروشگاه از خدمات آن در سه ماه گذشته
- بررسی تعداد کتاب‌های خوانده‌شده در سال گذشته توسط دانش‌آموزان متوسطه‌ی دوم یک شهر

۱۴۶ صفحه ۳۲ بحث و گفت‌وگو

هر یک از عوامل نام برده، (سن، محل سکونت و ...) چگونه می‌تواند بر فعالیت بدنی جامعه‌ی آماری مورد بررسی تأثیر بگذارد؟

چه عوامل دیگری به تعریف دقیق مسئله کمک می‌کند؟

گروه اجرا کننده‌ی این مطالعه باید شامل چه متخصصانی باشد و دانش هر یک چه نقشی در این مطالعه دارد؟ (مثلاً متخصصان تربیت‌بدنی چگونه می‌توانند به اندازه‌گیری متغیر «فعالیت بدنی» کمک کنند؟)

(زمینه: بررسی میزان فعالیت بدنی پسران کرمانشاه؛ عوامل نام‌برده‌ی کتاب: سن، محل سکونت، الگوهای فرهنگی فعالیت بدنی و توانایی‌ها.)

الف) تأثیر عوامل بر فعالیت بدنی:

- سن: افراد جوان معمولاً فعال‌ترند؛ با افزایش سن، فعالیت بدنی معمولاً کم می‌شود.
- محل سکونت: نزدیک بودن به باشگاه، پارک یا مکان ورزشی (و فضای شهری یا روستایی) فرصت فعالیت را زیاد یا کم می‌کند.
- الگوهای فرهنگی: برخی جوامع به ورزش‌هایی مانند ورزش‌های باستانی و پهلوانی علاقه دارند و این بر فعالیت افراد اثر می‌گذارد.
- توانایی‌ها و ناتوانی‌های جسمانی: افراد دارای ناتوانی جسمی فعالیت بدنی متفاوتی دارند.

ب) عوامل دیگر: جنسیت، شغل یا تحصیل، وضعیت سلامت، بودجه و امکانات، فصل سال و وضع آب‌وهوا، ورزشی بودن یا نبودن خانواده.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

پ) گروه اجراکننده: متخصص تربیت‌بدنی (تعریف و اندازه‌گیری فعالیت بدنی؛ مثلاً تعداد دقایق ورزش در هفته یا شدت فعالیت)، پزشک (سلامت و محدودیت‌های جسمی)، جامعه‌شناس (فرهنگ و عادت‌ها)، آمارشناس (طرح نمونه‌گیری، پرسشنامه و تحلیل) و افراد بومی (آشنا با شرایط منطقه).

۱۴۷ صفحه ۳۳ کار در کلاس

۱. برای بررسی کدام‌یک از موارد زیر به اندازه‌ی نمونه‌ی بزرگ‌تری نیاز است؟ توضیح دهید.

سن دانش‌آموزان در کلاسی که در آن درس می‌خوانید.

معدل سال گذشته‌ی دانش‌آموزان در کلاسی که در آن درس می‌خوانید.

هرچه پراکندگی متغیر در جامعه بیشتر باشد، برای اطمینان از وجود تنوع در نمونه، به نمونه‌ی بزرگ‌تری نیاز داریم.

سن دانش‌آموزان یک کلاس تقریباً یکسان است (مثلاً همه ۱۷ یا ۱۸ ساله‌اند) و پراکندگی بسیار کمی دارد، پس با نمونه‌ی کوچک هم می‌توان آن را خوب برآورد کرد. اما معدل‌ها از دانش‌آموزی به دانش‌آموز دیگر بسیار متفاوت‌اند و پراکندگی زیادی دارند.

پاسخ: برای بررسی معدل سال گذشته به اندازه‌ی نمونه‌ی بزرگ‌تری نیاز است.

۱۴۸ صفحه ۳۳ کار در کلاس

۲. علی و امید در یک پروژه‌ی دانش‌آموزی می‌خواهند بررسی کنند که «نوجوانان منطقه‌ی ۲ آبادان در اوقات فراغت خود به چه فعالیت‌هایی مشغول‌اند و برای هر فعالیت چقدر وقت صرف می‌کنند.»

علی پیشنهاد می‌کند: «برای نمونه‌گیری به چند مکان تفریحی، فرهنگی، مذهبی و ورزشی برویم و در هر مکان چند نوجوان را به‌طور تصادفی انتخاب کنیم و از آن‌ها بپرسیم به‌طور متوسط چند ساعت در هفته به این مکان می‌آیند.»

امید پیشنهاد می‌کند: «اگر ادارهٔ آموزش و پرورش منطقه موافقت کند، برای نمونه‌گیری فهرستی از دانش‌آموزان متوسطه‌ی اول و دوم منطقه‌ی ۲ آبادان تهیه کنیم. بعد، با اندازه‌ی نمونه‌ی کافی افرادی را به‌طور تصادفی انتخاب کنیم و از هر دانش‌آموز بپرسیم در اوقات خود چه فعالیت‌هایی انجام می‌دهد و به‌صورت متوسط چند ساعت در هفته به این فعالیت‌ها مشغول است.»

موارد زیر اشکالاتی است که در پیشنهادهای امید و علی وجود دارد. در هر مورد، بنویسید اشکال مربوط به پیشنهاد علی است یا امید.

الف) کسانی که اوقات فراغتشان را در خانه می‌گذرانند، شانس حضور در نمونه را ندارند.

ب) نوجوانان بازمانده از تحصیل، شانس حضور در نمونه را ندارند.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

پ) اگر مثلاً به کتابخانه برویم و از نوجوانان بپرسیم به‌طور متوسط چند ساعت در هفته به این مکان می‌آیند، میانگین داده‌های به‌دست‌آمده (آمارهٔ نمونه) بزرگ‌تر از میانگین آن در جامعه‌ی آماری (پارامتر جامعه) می‌شود؛ چون نوجوانانی که اصلاً به کتابخانه نمی‌روند، در نظر گرفته نشده‌اند.
دو اشکال دیگر که به نمونه‌گیری علی وارد است، مطرح کنید.

الف) پیشنهاد علی؛ نمونه فقط از افرادی گرفته می‌شود که در همان مکان‌های عمومی حضور دارند و کسانی که اوقات فراغت را در خانه می‌گذرانند هرگز دیده نمی‌شوند.

ب) پیشنهاد امید؛ فهرست دانش‌آموزان فقط شامل کسانی است که مشغول تحصیل‌اند، پس نوجوانان ترک‌تحصیل‌کرده در جامعه‌ی مورد نظر (نوجوانان منطقه‌ی ۲) قرار دارند اما شانس انتخاب شدن ندارند.

پ) پیشنهاد علی؛ جامعه‌ی واقعی همه‌ی نوجوانان منطقه است و کسانی که به آن مکان نمی‌روند شانس حضور ندارند؛ پس میانگین نمونه از میانگین جامعه بزرگ‌تر برآورد می‌شود.

دو اشکال دیگر نمونه‌گیری علی:

1. انتخاب مکان‌ها دلخواه است، نه تصادفی؛ ممکن است مکان‌های مهمی (یا محله‌های دیگر) در نظر گرفته نشوند و نمونه نماینده‌ی کل منطقه نباشد.
2. شانس انتخاب افراد برابر نیست: کسی که بیشتر به یک مکان می‌رود یا به چند مکان سر می‌زند، احتمال بیشتری برای دیده شدن (و حتی چندبار شمرده شدن) دارد؛ همچنین پرسش فقط درباره‌ی «همان مکان» است و زمان صرف‌شده برای سایر فعالیت‌های اوقات فراغت به دست نمی‌آید.

۱۴۹ صفحه ۳۳ کار در کلاس

۳. برای بررسی وضعیت اجتماعی ــ اقتصادی خانوارهای یک شهر، در کدام یک از شیوه‌های نمونه‌گیری زیر، همه‌ی قشرهای جامعه شانس حضور ندارند؟ چرا؟
الف) انتخاب تصادفی خانوارها براساس رقم اول تلفن خانه‌ها
ب) انتخاب تصادفی خانوارها براساس رقم آخر تلفن خانه‌ها.

پاسخ: شیوه‌ی (الف).

رقم‌های اول شماره‌ی تلفن ثابت در هر شهر، معمولاً نشان‌دهنده‌ی مرکز مخابراتی و در نتیجه محله یا منطقه‌ی خاصی از شهر هستند. اگر خانوارها را بر اساس رقم اول انتخاب کنیم، ممکن است محله‌هایی که با رقم‌های دیگر شروع می‌شوند (مثلاً محله‌های مرفه یا کم‌درآمد) اصلاً در نمونه نباشند؛ پس همه‌ی قشرها شانس حضور ندارند.

اما رقم آخر تلفن به محل سکونت و وضعیت اقتصادی ربطی ندارد و در همه‌ی محله‌ها تقریباً به یک اندازه پخش است؛ پس در شیوه‌ی (ب) همه‌ی قشرها (با شانس تقریباً برابر) می‌توانند در نمونه حضور یابند.

دو شرکت به نرگس پیشنهاد کار داده‌اند که یکی از آن‌ها ۳۰ و دیگری ۳۱ کارمند دارد. میانگین حقوق ماهیانه‌ی کارمندان شرکت اول، تقریباً ۷/۶ میلیون تومان و میانگین حقوق ماهیانه‌ی کارمندان شرکت دوم تقریباً ۱۰ میلیون تومان است. او برای انتخاب یکی از دو شرکت، از اعظم و مریم نظرخواهی می‌کند.

اعظم می‌گوید: «شرکت دوم را انتخاب کن؛ چون به طور متوسط هر ماه ۴ میلیون تومان درآمد خواهی داشت.»

مریم می‌گوید «به نظر من این اطلاعات کافی نیست. گزارش معیار گرایش به مرکز بدون معیار پراکندگی چه فایده‌ای دارد؟» آن‌ها تصمیم می‌گیرند شرایط را کمی بیشتر بررسی کنند پس، در هر شرکت چند نفر را به‌طور تصادفی انتخاب می‌کنند و اطلاعات زیر را گردآوری می‌کنند.

الف) با استفاده از داده‌های جدول بالا، نمودار جعبه‌ای حقوق ماهیانه‌ی کارمندان این دو شرکت را روی یک محور رسم کنید.

ب) با توجه به نمودارهای قسمت الف، درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

حقوق تقریباً ۵۰٪ کارمندان شرکت دوم کمتر از کمترین حقوق کارمندان شرکت اول است.

اگر نرگس سطح تحصیلات و تجربه‌ی متوسطی داشته باشد و این دو شرکت افراد را براساس شایستگی‌هایشان انتخاب کنند، شرکت اول برای او مناسب است.

در شرکت دوم، میانگین، معیار گرایش به مرکز مناسب است.

حقوق کارمندان (میلیون تومان)

شرکت	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
شرکت اول	۷/۸	۷/۱	۹	۷/۹	۷/۴	۷/۷	۷/۲	۷/۵	۷
شرکت دوم	۶/۸	۶/۹	۱۶/۱	۷/۶	۶/۸	۱۸/۱	۱۴	۷	۶/۷

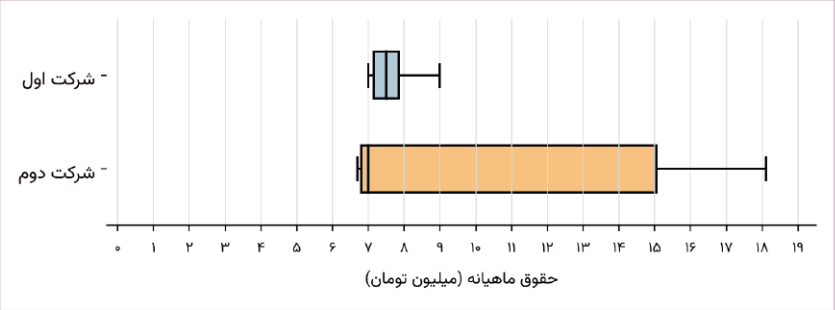
الف) داده‌ها را مرتب می‌کنیم و برای هر شرکت (n = ۹ داده) کمینه، Q۱، میانه، Q۳ و بیشینه را به دست می‌آوریم (برای n فرد، میانه از دو نیمه کنار گذاشته می‌شود):

شرکت اول: ۷ ، ۷/۱ ، ۷/۲ ، ۷/۴ ، ۷/۵ ، ۷/۷ ، ۷/۸ ، ۷/۹ ، ۹ ← کمینه = ۷، Q۱ = (۷/۱ + ۷/۲) ÷ ۲ = ۷/۱۵، میانه = ۷/۵، Q۳ = (۷/۸ + ۷/۹) ÷ ۲ = ۷/۸۵، بیشینه = ۹.

شرکت دوم: ۶/۷ ، ۶/۸ ، ۶/۸ ، ۶/۹ ، ۷ ، ۷/۶ ، ۱۴ ، ۱۶/۱ ، ۱۸/۱ ← کمینه = ۶/۷، Q۱ = (۶/۸ + ۶/۸) ÷ ۲ = ۶/۸، میانه = ۷، Q۳ = (۱۴ + ۱۶/۱) ÷ ۲ = ۱۵/۰۵، بیشینه = ۱۸/۱.

جعبه از Q۱ تا Q۳ با خطی در میانه رسم می‌شود و ضلع‌ها (خط‌های دو طرف) تا کمینه و بیشینه‌اند:

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت



(دامنه‌ی میان‌چارکی: شرکت اول ۷/۸۵ – ۷/۱۵ = ۰/۷ و شرکت دوم ۱۵/۰۵ – ۶/۸ = ۸/۲۵.)

ب) بررسی عبارت‌ها:

- «حقوق تقریباً ۵۰٪ کارمندان شرکت دوم کمتر از کمترین حقوق شرکت اول است.» درست؛ کمترین حقوق شرکت اول ۷ است و میانه‌ی شرکت دوم هم ۷ است. یعنی حدود نیمی از کارمندان شرکت دوم (۴ نفر از ۹ نفر، حقوق‌های ۶/۷ تا ۶/۹) کمتر از ۷ می‌گیرند.
- «اگر نرگس سطح تحصیلات و تجربه‌ی متوسطی داشته باشد و ... شرکت اول برای او مناسب است.» درست؛ فرد با شایستگی متوسط در شرکت دوم احتمالاً حقوقی نزدیک میانه (۷ یا کمتر) می‌گیرد و حقوق‌های ۱۴ تا ۱۸ مخصوص تعداد کمی از کارمندان است، در حالی که در شرکت اول حقوق‌ها فشرده‌اند و میانه‌ی آن (۷/۵) از میانه‌ی شرکت دوم بیشتر است.
- «در شرکت دوم، میانگین، معیار گرایش به مرکز مناسب است.» نادرست؛ در شرکت دوم داده‌های دورافتاده‌ی ۱۴، ۱۶/۱ و ۱۸/۱ وجود دارد که میانگین را به ۱۰ رسانده‌اند، در حالی که اکثر کارمندان حدود ۷ می‌گیرند و هیچ کارمندی عملاً حقوقی نزدیک ۱۰ ندارد. برای این داده‌ها میانه (۷) و دامنه‌ی میان‌چارکی معیارهای مناسب‌اند.

نتیجه: حرف اعظم نادرست است؛ میانگین ۱۰ شرکت دوم گمراه‌کننده است و پراکندگی (جعبه‌ی بلند) نشان می‌دهد حقوق در شرکت دوم بسیار نایکنواخت است. گزارش معیار گرایش به مرکز بدون معیار پراکندگی کافی نیست، همان‌طور که مریم می‌گوید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۵۱ صفحه ۳۷ کار در کلاس

دو مدرسه‌ی متوسطه‌ی دوم، که تعداد دانش‌آموزانشان تقریباً برابر بود، در سال گذشته با تغییر برنامه‌ها و کادر آموزشی‌شان، وضعیت قبولی دانش‌آموزان را در ۱۵ دانشگاه برتر کشور بهبود داده‌اند. مدرسه‌ی اول قبولی‌هایش ۲۰۰ درصد افزایش داشت و مدرسه‌ی دوم ۲۰ درصد. فرض می‌کنیم اولیا برای انتخاب مدرسه‌ی فرزندان خود محدودیتی ندارند.

الف) در این مسئله، متغیر «قبولی در ۱۵ دانشگاه برتر کشور» (قبول شدن / قبول نشدن) چه نوع متغیری است؟ کمّی یا کیفی؟

ب) با توجه به این اطلاعات، کدام مدرسه را به اولیا پیشنهاد می‌کنید؟

پ) افزایش ۲۰۰ درصدی و ۲۰ درصد به چه معناست؟ توضیح دهید.

ت) فرض کنید در مدرسه‌ی اول، تعداد قبولی‌ها قبلاً ۱ نفر بوده و با تغییر کادر آموزشی ۳ نفر شده است (۲۰۰٪ افزایش) و در مدرسه‌ی دوم، تعداد قبولی‌ها ۷۰ نفر بوده و با تغییر کادر آموزشی ۸۴ نفر شده است (۲۰٪ افزایش). اکنون کدام مدرسه را پیشنهاد می‌کنید؟

ث) در گزارش متغیرهای کیفی، ارائه‌ی درصد بدون مشخص‌کردن تعداد، چگونه می‌تواند گمراه‌کننده باشد؟

الف) کیفی (اسمی)؛ چون مقدارهای آن «قبول شدن» و «قبول نشدن» است و عدد نیست.

ب) فقط با توجه به درصدها (۲۰۰٪ در برابر ۲۰٪)، مدرسه‌ی اول بهتر به نظر می‌رسد و ممکن است آن را پیشنهاد کنیم؛ اما این پیشنهاد هنوز دقیق نیست (ادامه را ببینید).

پ) افزایش ۲۰۰٪ یعنی مقدار جدید = مقدار قبلی + ۲ برابر مقدار قبلی = ۳ برابر مقدار قبلی؛ افزایش ۲۰٪ یعنی مقدار جدید = ۱/۲ برابر مقدار قبلی (یک‌پنجم اضافه‌تر از قبل).

ت) مدرسه‌ی اول: از ۱ به ۳ نفر رسیده است؛ مدرسه‌ی دوم: از ۷۰ به ۸۴ نفر (۷۰ × ۱/۲ = ۸۴). با توجه به تعداد قبولی‌ها، مدرسه‌ی دوم (۸۴ قبولی در برابر ۳ قبولی) را پیشنهاد می‌کنیم.

ث) درصد افزایش به مقدار قبلی (پایه) بستگی دارد. اگر مقدار اولیه‌ی کوچک باشد، افزایشی کوچک (مثلاً ۲ نفر) درصد بسیار بزرگی (۲۰۰٪) می‌دهد و تصویر بزرگ‌نمایی‌شده‌ای ایجاد می‌کند. پس «برای توصیف داده‌های کیفی (اسمی یا ترتیبی)، گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد.»

۱۵۲ صفحه ۳۷ گام ۵ (بحث و نتیجه‌گیری)

(از جامعه‌ای با اندازه‌ی N به چند طریق می‌توانیم نمونه‌هایی با اندازه‌ی n داشته باشیم؟)

انتخاب n عضو از N عضو، بدون توجه به ترتیب انتخاب (نمونه یک زیرمجموعه است) و بدون جایگذاری، یک ترکیب است؛ پس تعداد نمونه‌های ممکن برابر است با:

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}$$

مثال: از جامعه‌ای با N = ۵ نفر، نمونه‌های دونفری به $\binom{5}{2} = 10$ طریق ممکن است. به همین دلیل نتیجه‌ی نمونه‌ها با هم فرق می‌کند و تعمیم نتیجه به جامعه قطعی نیست.

۱۵۳ صفحه ۳۸ کار در کلاس

۱. برای احداث یک استخر در حاشیه‌ی یک کلان‌شهر، محل مناسبی انتخاب، و با همکاری گروهی متخصص، استخری مجهز و اصولی در آن محل ساخته شد. پس از بهره‌برداری، مشاهده شد که اغلب اوقات افراد مسن زیادی در استخر، که شناگر نبودند، به توصیه‌ی پزشکی در قسمت کم‌عمق در حال راه رفتن در آب‌اند و در قسمت عمیق فقط گاهی چند نفر شنا می‌کنند.

الف) آگاهی از میانگین سنی افراد منطقه‌ی احداث استخر، چگونه می‌توانست به اجرای این پروژه کمک کند؟

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

ب) چگونه مشورت با افراد بومی درباره‌ی اطلاعات قسمت الف و ب می‌توانست به متخصصان کمک کند که ابعاد قسمت کم‌عمق و عمیق استخر را متناسب با نیاز منطقه طراحی کنند؟

الف) اگر میانگین (و میانه‌ی) سن ساکنان منطقه بالا بود، متخصصان می‌فهمیدند بیشتر مراجعان مسن‌اند؛ آنان معمولاً شنای عمیق انجام نمی‌دهند و برای درمان یا ورزش سبک در آب کم‌عمق راه می‌روند. بنابراین می‌شد قسمت کم‌عمق را بزرگ‌تر و قسمت عمیق را کوچک‌تر طراحی کرد و امکانات مناسب سالمندان (نرده، شیب ملایم، سرویس بهداشتی نزدیک) در نظر گرفت. این همان گام «بیان مسئله» است: شناخت درست جامعه و هدف قبل از اجرا.

ب) افراد بومی می‌توانند اطلاعاتی درباره‌ی ترکیب سنی افراد، درصد افرادی که شنا بلدند، عادت‌ها و فرهنگ ورزشی منطقه، و نیاز به توصیه‌های پزشکی و درمانی بدهند. با این اطلاعات متخصصان می‌توانند تصمیم بگیرند چه سهمی از استخر کم‌عمق (برای کودکان، مسن‌ها و افراد ناشناگر) و چه سهمی عمیق (برای شناگران) باشد؛ در نتیجه استخر متناسب با نیاز واقعی مردم ساخته می‌شود و از هزینه‌ی بیهوده جلوگیری می‌شود. این مشورت در گام‌های بیان مسئله و طرح و برنامه‌ریزی انجام می‌شود.

۱۵۴ صفحه ۳۹ **کار در کلاس**

۲. هر یک از موارد زیر اجرای نادرست کدام گام است و بر کدام گام‌های دیگر اثر می‌گذارد؟ چگونه؟

الف) مسئله به صورتی بیان شده است که اجراکنندگان برداشت‌های متفاوتی از اهداف پژوهش دارند.

ب) اندازه‌گیری وزن افراد نمونه با دو واحد متفاوت (کیلوگرم و پوند) انجام شده است.

پ) تمامی داده‌های دورافتاده حذف شده‌اند.

ت) براساس توزیع داده‌ها، میانه معیار گرایش به مرکز مناسبی بود. اما چون مقدار میانه با آنچه انتظار می‌رفت متفاوت بود، میانگین داده‌ها گزارش شد.

ث) نتایج را فقط افراد متخصص آمار تفسیر کرده‌اند.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

الف) نادرست‌انجام‌شدن گام ۱ (بیان مسئله). اثر: در گام ۲ نمونه‌گیری و اندازه‌گیری متغیرها طبق برداشت‌های متفاوت انجام می‌شود، در گام ۳ داده‌های ناهمخوان گردآوری می‌شود، در گام ۴ تحلیل بی‌معنا و در گام ۵ نتیجه‌گیری ناروشن می‌شود.

ب) نادرست‌انجام‌شدن گام ۲ (طرح و برنامه‌ریزی، شیوه‌ی اندازه‌گیری) و در اجرا گام ۳ (گردآوری). اثر: داده‌ها یکسان نیستند و پیش از تحلیل باید به یک واحد تبدیل شوند، در غیر این‌صورت میانگین، انحراف معیار و نمودارها (گام ۴) و نتیجه‌گیری (گام ۵) نادرست می‌شود.

پ) نادرست‌انجام‌شدن گام ۳ (پاک‌سازی داده‌ها)؛ فقط داده‌های اشتباه (مثل ۲۴ ساعت بیشتر در روز) باید حذف یا اصلاح شوند، نه هر داده‌ی دورافتاده. اثر: پراکندگی و میانگین واقعی تغییر می‌کند (گام ۴) و تصویر نادرستی از جامعه (گام ۵) ارائه می‌شود.

ت) نادرست‌انجام‌شدن گام ۴ (تحلیل داده‌ها: انتخاب معیار مناسب). اثر: گزارش میانگین به‌جای میانه (با وجود داده‌های دورافتاده) نتایج را نماینده‌ی واقعی داده‌ها نشان نمی‌دهد و در گام ۵ تفسیر و نتیجه‌گیری را گمراه می‌کند؛ باید تصمیم بر اساس داده‌ها باشد نه انتظار قبلی.

ث) نادرست‌انجام‌شدن گام ۵ (بحث و نتیجه‌گیری). تفسیر باید با مشورت افراد مطلع از موضوع (کارشناسان زمینه‌ی پژوهش) انجام شود؛ آمارشناس به‌تنهایی ممکن است محدودیت‌ها و معنای واقعی نتایج را در موضوع مورد بررسی نداند. اثر: نتیجه‌گیری نادرست و بی‌ارتباط با هدف، که ممکن است ما را به بازبینی گام‌های اول (بیان مسئله) و دوم بازگرداند.

۱۵۵ صفحه ۳۹ تمرین

۱. به‌نظر می‌رسد کودکانی که زبان مادری‌شان فارسی نیست، در دورهٔ دبستان مشکلات بیشتری برای یادگیری مفاهیم درسی دارند. با انتخاب یک جامعه‌ی آماری محدود (از نظر پایه‌ی تحصیلی، جنسیت، منطقه، زبان مادری و...) و انتخاب متغیر مناسب، این مسئله را به‌صورت دقیق و شفاف بیان کنید.

نمونه‌ی یک بیان دقیق (گام اول چرخه):

- جامعه‌ی آماری: دانش‌آموزان دختر پایه‌ی سوم دبستان‌های دولتی شهرستان زاهدان در سال تحصیلی جاری (جامعه‌ی محدود از نظر پایه، جنسیت، منطقه و سال).
- گروه‌ها: دانش‌آموزانی که زبان مادری‌شان فارسی نیست در مقابل دانش‌آموزانی که زبان مادری‌شان فارسی است.
- متغیر: نمره‌ی درس ریاضی (یا علوم) در امتحان پایان ترم اول (متغیر کمّی).

بیان مسئله: «آیا میانگین (یا میانه‌ی) نمره‌ی ریاضی پایان ترم اول، در دانش‌آموزان دختر پایه‌ی سوم دبستان‌های دولتی زاهدان که زبان مادری‌شان فارسی نیست، کمتر از دانش‌آموزان همان جامعه که زبان مادری‌شان فارسی است، می‌باشد؟»

(پاسخ دیگر با جامعه یا متغیری متفاوت هم قابل قبول است، به شرط آن‌که جامعه محدود و متغیر دقیق تعریف شود.)

۱۵۶ صفحه ۴۰ تمرین

۲. با توجه به تأثیر شیوه‌های مختلف حمل و نقل بر محیط‌زیست، می‌خواهیم در یک کلاس ۲۸ نفره با انتخاب تصادفی ۹ نفر از دانش‌آموزان، از آن‌ها بپرسیم، در هفته‌ی گذشته، بیشتر به کدام‌یک از شیوه‌های زیر به مدرسه آمده‌اند؟

۱ــ پیاده یا با دوچرخه

۲ــ با وسایل حمل‌ونقل عمومی

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۳ــ با سرویس مدرسه یا خودروی شخصی.

الف) در این مطالعه، جامعه‌ی آماری، نمونه‌ی آماری، اندازه‌ی جامعه و اندازه‌ی نمونه را مشخص کنید.

ب) داده‌های این مطالعه را با چه روشی می‌توان گردآوری کرد؟ چه مشکلاتی ممکن است در گردآوری این داده‌ها رخ دهد؟

پ) متغیر تصادفی مورد بررسی این مطالعه چیست؟ نوع متغیر (کمّی/کیفی)، و مقیاس اندازه‌گیری (فاصله‌ای/نسبتی ــ اسمی/ترتیبی) آن را مشخص کنید.

ت) چه نمودارها و آماره‌هایی برای گزارش نتایج این مطالعه مناسب‌اند؟

ث) آیا می‌توانیم این نتایج را به شیوه‌ی رفت و آمد دانش‌آموزان این کلاس در کل سال تحصیلی تعمیم دهیم (مثلاً به فصل‌های مختلف یا زمان برگزاری آزمون‌های پایان نیم‌سال)؟ توضیح دهید.

ج) اگر ۹ نفر دیگر از این کلاس را به‌طور تصادفی انتخاب می‌کردیم، آیا دقیقاً همین نتایج حاصل می‌شد یا امکان داشت حداقل نتایج کمی تغییر کند؟ توضیح دهید.

الف) جامعه‌ی آماری: همه‌ی دانش‌آموزان این کلاس (اندازه‌ی جامعه $N = ۲۸$). نمونه‌ی آماری: ۹ دانش‌آموزی که به‌طور تصادفی انتخاب می‌شوند (اندازه‌ی نمونه $n = ۹$).

ب) روش گردآوری: پرسش مستقیم (مصاحبه) یا پرسشنامه‌ی کوتاه با سه گزینه از ۹ نفر؛ انتخاب تصادفی نمونه با قرعه‌کشی یا جدول اعداد تصادفی. مشکلات احتمالی: فراموش کردن یا پاسخ نادرست دانش‌آموز؛ استفاده از چند شیوه در طول هفته (و ناروشن بودن «بیشتر»)؛ غیبت یا عدم همکاری فرد منتخب؛ اشتباه در ثبت داده.

پ) متغیر: «شیوه‌ی رفت‌وآمد به مدرسه در هفته‌ی گذشته». نوع: کیفی؛ مقیاس: اسمی (سه حالت بدون ترتیب ذاتی).

ت) برای متغیر کیفی: جدول فراوانی (تعداد و درصد)، نمودار میله‌ای یا دایره‌ای و گزارش نما (پرتکرارترین شیوه). میانگین و انحراف معیار برای این متغیر معنا ندارند.

ث) خیر؛ نمونه فقط یک هفته را نشان می‌دهد و شیوه‌ی رفت‌وآمد با فصل (باران، سرما، گرما)، زمان آزمون‌ها و مانند آن تغییر می‌کند. تعمیم برای سایر هفته‌ها (جامعه‌ی دیگر) نادرست است؛ فقط برای همان هفته و همان کلاس می‌توان نتیجه گرفت.

ج) نه؛ احتمالاً نتایج کمی تفاوت می‌کرد. هر نمونه از جامعه شامل افراد متفاوتی است، پس تعداد و درصد در هر شیوه (آماره‌ی نمونه) ممکن است عوض شود، حتی اگر جامعه‌ی آماری تغییر نکرده باشد. تعداد نمونه‌های ممکن $\binom{28}{9}$ است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۵۷ صفحه ۴۰ تمرین

۳. در هریک از موارد زیر، علت عدم تناسب جامعه‌ی آماری با نمونه‌های انتخاب شده را توضیح دهید. برای بهبود نمونه‌گیری چه پیشنهادی دارید؟ انتخاب نادرست نمونه در هریک از موارد چگونه بر نتایج تأثیر می‌گذارد؟

الف) مسئله: بررسی میزان رضایت شغلی در کارمندان کارگاه شبانه‌روزی. نمونه: انتخاب تصادفی تعدادی از مدیران ارشد شیفت روز

ب) مسئله: نظرسنجی از مادران یک شهر درباره‌ی میزان رضایتشان از برنامه‌های کودک تلویزیون. نمونه: انتخاب تصادفی برخی منازل از تمامی مناطق شهر و مراجعه به آن‌ها بین ساعت ۸ تا ۱۰ صبح

پ) مسئله: نظرسنجی از دانش‌آموزان پایه‌ی دوازدهم منطقه‌ی ۲ بوشهر درباره‌ی اینکه به‌طور متوسط چند ساعت از روز را به انجام دادن تکالیف مدرسه اختصاص می‌دهند. نمونه: دختران پایه‌ی دوازدهم یک مدرسه از این منطقه که به‌صورت داوطلبانه در این مطالعه مشارکت کرده‌اند.

الف) جامعه: همه‌ی کارمندان کارگاه (در همه‌ی شیفت‌ها)؛ نمونه: فقط مدیران ارشد و فقط شیفت روز. علت نامناسب بودن: مدیران یک زیرمجموعه‌ی کوچک و متفاوت‌اند (حقوق و موقعیت بهتر) و کارمندان شیفت شب و عصر و کارگران عادی شانس حضور ندارند. نتیجه: رضایت شغلی معمولاً بیشتر از واقع برآورد می‌شود. پیشنهاد: انتخاب تصادفی از فهرست همه‌ی کارمندان، با سهم مناسب از هر شیفت و هر رده‌ی شغلی.

ب) جامعه: همه‌ی مادران شهر؛ نمونه: منازل انتخاب‌شده، با مراجعه بین ۸ تا ۱۰ صبح. در این ساعت مادران شاغل خانه نیستند و بیشتر مادران خانه‌دار (که ممکن است بیشتر تلویزیون ببینند) پاسخ می‌دهند؛ کسانی هم که در منزل نبوده‌اند، شانس حضور ندارند. نتیجه: نظر مادران شاغل دیده نمی‌شود و میزان رضایت یا نارضایتی واقعی برآورد نمی‌شود. پیشنهاد: مراجعه یا تماس در ساعت‌های مختلف (از جمله عصر و آخر هفته) یا استفاده از تلفن و روش‌های آنلاین.

پ) جامعه: همه‌ی دانش‌آموزان (دختر و پسر) پایه‌ی دوازدهم منطقه‌ی ۲ بوشهر؛ نمونه: فقط دختران یک مدرسه که داوطلب شده‌اند. پسران و دانش‌آموزان مدارس دیگر شانس حضور ندارند و داوطلب شدن نشان‌دهنده‌ی علاقه‌مندی بیشتر به موضوع است (افرادی که بیشتر درس می‌خوانند ممکن است بیشتر مشارکت کنند). نتیجه: میانگین ساعت تکلیف احتمالاً بیشتر از واقع برآورد می‌شود. پیشنهاد: انتخاب تصادفی از فهرست همه‌ی دانش‌آموزان منطقه (دختر و پسر، از همه‌ی مدارس) و پیگیری از افراد منتخب، نه داوطلبانه.

۱۵۸ صفحه ۴۱ تمرین

۴. «مطالعات دانشمندان علوم اعصاب نشان می‌دهد که مغز انسان برای انجام دادن هم‌زمان چند فعالیت ساخته نشده است و هر بار که ما گمان می‌کنیم مشغول انجام دادن چند کار به‌صورت هم‌زمان هستیم، درواقع مغزمان دارد با سرعت از کاری به کار دیگر می‌پرد. مغز انسان تشنهٔ خبرها و اتفاقات جدید است. وقتی

مشغول مطالعه و یادگیری هستیم و ناگهان صدای دریافت یک پیام را از تلفن همراه خود می‌شنویم، مغز ما، که بی‌تابانه منتظر کشف آن اطلاع جدید است، دیگر روی یک کار متمرکز نیست. این مطالعات نشان می‌دهد که مثلاً اگر دانش‌آموزی هنگام مطالعه و یادگیری، هم‌زمان تلویزیون تماشا کند یا گفت‌وگویی را در یک شبکه‌ی اجتماعی دنبال کند، مطالب درسی به‌جای اینکه به قسمت حقایق و ایده‌ها برود، به قسمت مهارت‌ها فرستاده می‌شود.»

سعید و سهراب پس از خواندن این مطلب در نشریه‌ی مدرسه تصمیم گرفتند نمره‌ی عملکرد تحصیلی ۲۵ دانش‌آموز پایه‌ی دوازدهم مدرسه را که هنگام مطالعه، تلفن همراه خود را در حالت بی‌صدا قرار می‌دهند (گروه یک)، با ۲۵ دانش‌آموز پایه‌ی دوازدهم دیگر که این کار را انجام نمی‌دهند (گروه دو) مقایسه کنند. نتایج این مطالعه به این شرح است:

الف) از مقایسه‌ی میانه‌ی گروه یک با چارک سوم گروه دو چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

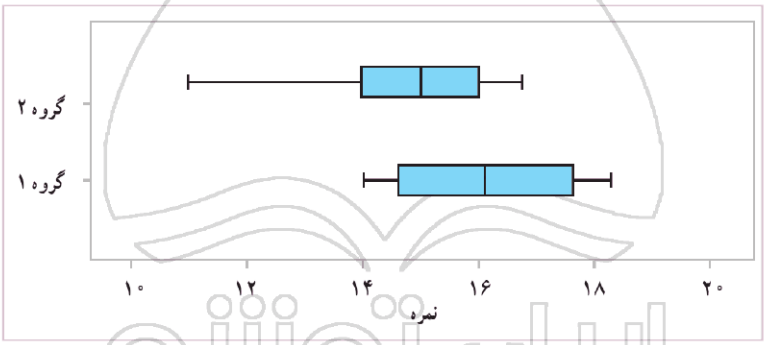
ب) پراکندگی دو گروه را با استفاده از دامنه‌ی تغییرات و دامنه‌ی میان چارکی مقایسه کنید.

پ) از مقایسه‌ی کمینه‌ی گروه یک با چارک اول گروه دوم چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ت) در کدام گروه گزارش میانگین و انحراف معیار می‌تواند گمراه‌کننده باشد؟

ث) در کدام گروه مقدار میانگین و میانه به هم نزدیک‌ترند؟

ج) نتایج این مطالعه را به چه جامعه‌ای می‌توان تعمیم داد؟



ابتدا از محور نمودار (مقیاس هر خانه ۲ نمره)، مقدارهای تقریبی را می‌خوانیم:

	کمینه	Q۱	میانه	Q۳	بیشینه
گروه ۱	۱۴	≈ ۱۴/۶	≈ ۱۶	≈ ۱۷/۶	≈ ۱۸/۳
گروه ۲	۱۱	۱۴	۱۵	۱۶	≈ ۱۶/۸

الف) میانه‌ی گروه یک (حدود ۱۶) تقریباً برابر با چارک سوم گروه دو (۱۶) است؛ یعنی نیمی از دانش‌آموزان گروه یک نمره‌ای حداقل برابر با نمره‌ی ۲۵٪ بالایی گروه دو دارند. به عبارت دیگر، حدود ۵۰٪ گروه یک از ۷۵٪ گروه دو بهترند؛ پس بی‌صدا گذاشتن تلفن همراه هنگام مطالعه با نمره‌ی بالاتر همراه است.

ب) دامنه‌ی تغییرات (بیشینه − کمینه): گروه یک ≈ ۱۸/۳ − ۱۴ ≈ ۴/۳ و گروه دو ≈ ۱۶/۸ − ۱۱ ≈ ۵/۸؛ پس پراکندگی کل داده‌ها در گروه دو بیشتر است. دامنه‌ی میان‌چارکی (Q۳ − Q۱): گروه یک ≈ ۱۷/۶ − ۱۴/۶ = ۳ و گروه دو ۱۶ − ۱۴ = ۲؛ پس پراکندگی ۵۰٪ میانی نمره‌ها در گروه یک بیشتر است.

ایران توشه
توشه‌ای برای هر موفقیت

پ) کمینه‌ی گروه یک (۱۴) تقریباً برابر با چارک اول گروه دو (۱۴) است؛ یعنی ۲۵٪ دانش‌آموزان گروه دو نمره‌ای کمتر یا برابر با کمترین نمره‌ی کل گروه یک دارند. پایین‌ترین نمره‌های گروه دو از نمره‌ی همه‌ی افراد گروه یک بدتر است.

ت) گروه دو؛ در این گروه دم سمت چپ (نمره‌های ۱۱ تا ۱۴) خیلی بلندتر از دم سمت راست است. نمره‌ی کم ۱۱ (دورافتاده) میانگین را پایین می‌کشد و انحراف معیار را بزرگ می‌کند، پس میانگین و انحراف معیار توصیف مناسبی نیستند و باید میانه و دامنه‌ی میان‌چارکی را گزارش کرد.

ث) گروه یک؛ جعبه و دُم‌های آن تقریباً متقارن‌اند (فاصله‌ی میانه تا Q۱ و تا Q۳ هر دو حدود ۱/۵ است)، پس میانگین و میانه‌ی آن به هم نزدیک‌اند. در گروه دو، میانگین به سبب دُم بلند چپ از میانه (۱۵) کمتر می‌شود.

ج) به همه‌ی دانش‌آموزان پایه‌ی دوازدهم همان مدرسه (جامعه‌ای که نمونه از آن انتخاب شده)، به شرط اینکه نمونه‌ها تصادفی انتخاب شده باشند. به دانش‌آموزان مدارس دیگر یا پایه‌های دیگر قابل تعمیم نیست.

مقدارهای کمینه، چارک‌ها و بیشینه از روی نمودار تقریبی خوانده شده‌اند؛ نتیجه‌گیری‌های بالا فقط به رابطه‌های روشن میان آن‌ها (برابری تقریبی میانه‌ی گروه ۱ با Q۳ گروه ۲ و کمینه‌ی گروه ۱ با Q۱ گروه ۲) وابسته است.

---

۱۵۹ صفحه ۴۲ تمرین

۵. در یک نظرسنجی، از ۱۵ دانش‌آموز علوم انسانی پایه‌ی یازدهم یک مدرسه پرسیده‌ایم که به‌نظر آن‌ها چند ساعت آموزشی در ماه برای برگزاری جلسات نقد کتاب یا فیلم مناسب است. داده‌های گردآوری شده به این شرح است:

۱۲ ۱۴ ۲۰ ۲۲ ۱۸ ۲۰ ۰ ۴ ۶ ۱۳ ۱۲ ۱۰ ۱۲ ۱۰ ۱۲ ۱۶

الف) این داده‌ها را طوری تغییر دهید که میانگین و انحراف معیار بیشتر شود اما میانه و چارک اول و چارک سوم تغییر نکند.

ب) فرض کنید می‌خواهیم دو نفر دیگر به این نمونه اضافه کنیم. داده‌های این دو نفر را طوری انتخاب کنید که میانگین و میانه تغییر نکند.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

مرتب‌شده‌ی داده‌ها: ۰، ۴، ۶، ۱۰، ۱۰، ۱۲، ۱۲، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۶، ۱۸، ۲۰، ۲۰، ۲۲ (n = ۱۵). مجموع = ۱۸۹، میانگین = ۱۸۹ ÷ ۱۵ = ۱۲/۶، میانه (هشتمین داده) = ۱۲، Q۱ = میانه‌ی هفت داده‌ی اول = ۱۰، Q۳ = میانه‌ی هفت داده‌ی آخر = ۱۸.

الف) میانه و چارک‌ها فقط به داده‌های وسط (۱۰، ۱۲، ۱۸ و داده‌های اطراف آن‌ها) بستگی دارند و تغییر دادن مقدار بیشینه، آن‌ها را عوض نمی‌کند. اما میانگین و انحراف معیار به همه‌ی داده‌ها وابسته‌اند. بیشینه‌ی ۲۲ را به ۳۰ تغییر می‌دهیم (از جای خود جابه‌جا نمی‌شود، همچنان آخرین داده است):

داده‌های جدید: ۰، ۴، ۶، ۱۰، ۱۰، ۱۲، ۱۲، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۶، ۱۸، ۲۰، ۲۰، ۳۰؛ میانه همچنان ۱۲، Q۱ = ۱۰ و Q۳ = ۱۸ است، ولی میانگین از ۱۲/۶ به حدود ۱۳/۱ می‌رسد و انحراف معیار هم از حدود ۵/۹۵ به حدود ۷/۰ بیشتر می‌شود (داده‌ی ۳۰ از میانگین دورتر است).

ب) برای ثابت ماندن میانگین (۱۲/۶)، مجموع دو داده‌ی جدید باید ۲ × ۱۲/۶ = ۲۵/۲ باشد؛ و برای ثابت ماندن میانه‌ی ۱۲ (نهمین داده از ۱۷ داده)، یکی کمتر یا مساوی ۱۲ و دیگری بیشتر یا مساوی ۱۲ باشد. مثلاً ۱۲ و ۱۳/۲ (مجموع ۲۵/۲)؛ دقت کنید که نمی‌توان هر دو داده را ۱۲/۶ گرفت، چون هر دو بزرگ‌تر از ۱۲ می‌شوند و میانه به ۱۲/۶ تغییر می‌کند.

بررسی: مجموع جدید ۱۸۹ + ۲۵/۲ = ۲۱۴/۲ و ۲۱۴/۲ ÷ ۱۷ = ۱۲/۶ و نهمین داده‌ی مرتب‌شده ۱۲ است.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

۱۶۰ صفحه ۴۲ تمرین

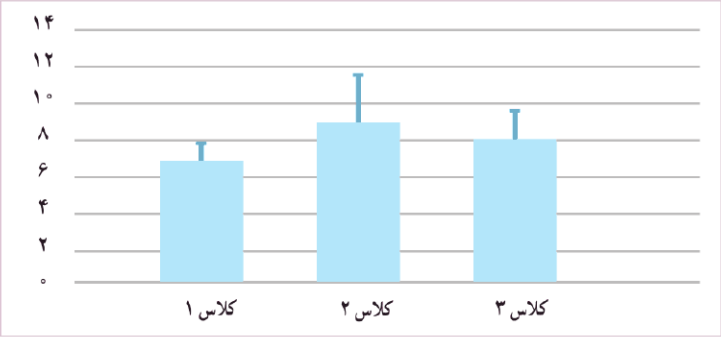
۶. با توجه به تأثیر کمیت و کیفیت خواب بر یادگیری، ندا و آوا در مطالعه‌ای با بررسی تمامی دانش‌آموزان سه کلاس پایه‌ی دهم، میانگین میزان خواب این دانش‌آموزان را در هفته‌ی گذشته برحسب ساعت پرسیدند و ثبت کردند. آن‌ها پس از گردآوری داده‌ها و بررسی درستی آن به‌صورت نمودارهای زیر نمایش دادند. (در این نمودارها بلندی مستطیل، نشان‌دهنده‌ی میانگین و میله‌ی خط اندازه‌ی انحراف معیار است.)

الف) چه عواملی ممکن است هنگام گردآوری داده‌ها، نتایج را از واقعیت دور کند؟ (هنگامی که از دانش‌آموزان راجع به میانگین ساعت خوابشان در هفته‌ی گذشته می‌پرسیم آیا آن‌ها می‌توانند به درستی به یاد آورند که شب چند ساعت خوابیده‌اند تا بتوانند میانگین را به درستی اعلام کنند؟) برای حل این مشکل چه راهکاری پیشنهاد می‌کنید؟

ب) نوع (کمّی/کیفی) و مقیاس اندازه‌گیری (فاصله‌ای/نسبتی ــ اسمی/ترتیبی) متغیر مورد بررسی در این مطالعه را مشخص کنید.

پ) با استفاده از اطلاعات نمودارها، نتایج را به‌صورت تقریبی در جدول زیر بنویسید.

ت) چه کسانی می‌توانند در اجرای بهتر این مطالعه به ما کمک کنند؟ چگونه؟



	کلاس ۱	کلاس ۲	کلاس ۳
میانگین			
انحراف معیار			

الف) عوامل: فراموش کردن یا حدسی گفتن ساعت‌ها (به‌ویژه گزارش ساعت خواب هر شب)؛ گرد کردن عددها؛ دقیق نبودن ساعت‌ها؛ تمایل به گفتن پاسخ پسندیده (مثلاً زیاد گفتن ساعت خواب)؛ تفاوت خواب شب‌های عادی و تعطیل. راهکار: ثبت روزانه‌ی ساعت خواب در یک دفترچه یا برنامه‌ی گوشی (به‌جای پرسیدن از حافظه)، یا استفاده از ابزار اندازه‌گیری خودکار (مثل ساعت هوشمند)، و پرسشنامه‌ی بی‌نام.

ب) متغیر: میانگین ساعت خواب هر دانش‌آموز در هفته. نوع: کمّی (پیوسته)؛ مقیاس: نسبتی (صفر در آن یعنی «اصلاً نخوابیدن» و صفر مطلق دارد و نسبت‌ها معنا دارند؛ مثلاً ۸ ساعت دو برابر ۴ ساعت است).

پ) با خواندن بلندی مستطیل‌ها و طول میله‌های خطا (مقدارها تقریبی‌اند):

	کلاس ۱	کلاس ۲	کلاس ۳
میانگین	≈ ۷	≈ ۹	≈ ۸
انحراف معیار	≈ ۱	≈ ۲/۵	≈ ۱/۵

ت) والدین (ثبت ساعت خواب فرزندان)، پزشک یا متخصص خواب (اندازه‌گیری درست و کیفیت خواب)، معلمان و مشاوران مدرسه (اجرای پرسشنامه، انتخاب زمان مناسب و ثبت نمره‌ها برای رابطه با یادگیری) و آمارشناس (طراحی روش گردآوری و تحلیل). همچنین خود دانش‌آموزان با ثبت دقیق و صادقانه‌ی ساعت خواب.

مقدارهای جدول (پ) از روی نمودار و به‌صورت تقریبی خوانده شده است و ممکن است با پاسخ کتاب اندکی تفاوت داشته باشد (مثلاً انحراف معیار کلاس ۲ بین ۲/۵ تا ۳).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۶۱ صفحه ۴۳ تمرین

۷. مدرسه‌ای برای ترویج فرهنگ کتاب‌خوانی، از دو سال پیش به غیر از دانش‌آموزان مدرسه، از خارج از مدرسه نیز عضو می‌پذیرد. نمودار میله‌ای زیر نشان‌دهنده‌ی روند تغییرات فراوانی اعضای جدید کتابخانه در دو گروه مذکور است.

الف) سال گذشته چند نفر از خارج از مدرسه عضو کتابخانه شده‌اند؟

ب) با توجه به روند این تغییرات، پیش‌بینی می‌کنید سال آینده چه تعداد از دانش‌آموزان این مدرسه عضو کتابخانه شوند؟

پ) با استفاده از نمودارهای میله‌ایِ داده شده، برای هریک از این سه سال یک نمودار دایره‌ای جداگانه رسم کنید.

ت) به نظر شما چه عواملی موجب این روند تغییرات شده است؟

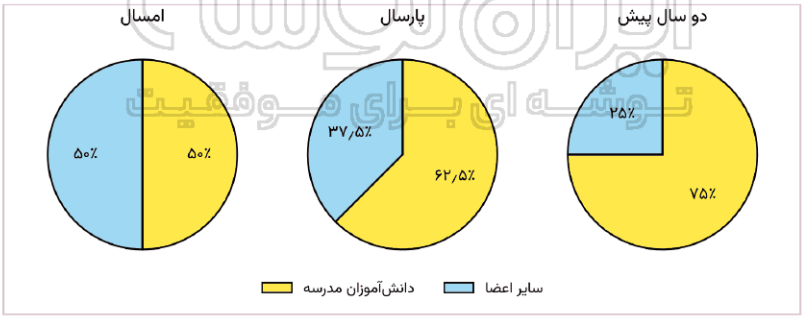


الف) «سایر اعضا» در «پارسال» (سال گذشته) میله‌ی ۳۰ دارد. پاسخ: ۳۰ نفر.

ب) فراوانی دانش‌آموزان در سه سال: ۶۰، ۵۰، ۴۰؛ یعنی هر سال ۱۰ نفر کم شده است. با ادامه‌ی همین روند، سال آینده ۴۰ − ۱۰ = ۳۰ نفر پیش‌بینی می‌شود (در همین حال، اعضای بیرونی ۲۰، ۳۰، ۴۰ هر سال ۱۰ نفر زیاد می‌شوند و پیش‌بینی آن‌ها ۵۰ نفر است).

پ) مجموع اعضای جدید هر سال ۸۰ نفر است؛ هر سال یک دایره‌ی جداگانه رسم می‌کنیم. زاویه‌ی هر قطاع = (فراوانی ÷ ۸۰) × ۳۶۰:

سال	دانش‌آموزان مدرسه	سایر اعضا
دو سال پیش	۶۰ نفر = ٪۷۵ = °۲۷۰	۲۰ نفر = ٪۲۵ = °۹۰
پارسال	۵۰ نفر = ٪۶۲/۵ = °۲۲۵	۳۰ نفر = ٪۳۷/۵ = °۱۳۵
امسال	۴۰ نفر = ٪۵۰ = °۱۸۰	۴۰ نفر = ٪۵۰ = °۱۸۰



ت) عواملی مانند: تبلیغ و معرفی کتابخانه در بیرون از مدرسه و جذب کتاب‌خوان‌های محله؛ کم شدن علاقه‌ی دانش‌آموزان به کتاب‌خوانی (مشغول شدن به تلفن همراه و شبکه‌های اجتماعی)؛ فشار درس‌ها و آزمون‌ها و کمبود وقت دانش‌آموزان؛ کهنه شدن کتاب‌های مورد نیاز دانش‌آموزان و نبودن کتاب‌های درسی‌ـمطالعاتی مناسب؛ و راحت‌تر بودن عضویت برای افراد بیرون. (پاسخ‌های منطقی دیگر هم قابل قبول است.)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۶۲ صفحه ۴۳ تمرین

۸. فراوانی بازدیدکنندگان از یک سالن نمایش در گروه‌های سنی مختلف در نمودار دایره‌ای روبه‌رو نمایش داده شده است. (در این نمودار، ۵۴ درجه‌ی مربوط به گروه سنی کمتر از ۲۰ سال، ۹۰ درجه‌ی مربوط به گروه سنی ۲۰ تا ۴۰ سال و بقیه مربوط به گروه سنی ۴۰ تا ۶۰ سال است.)

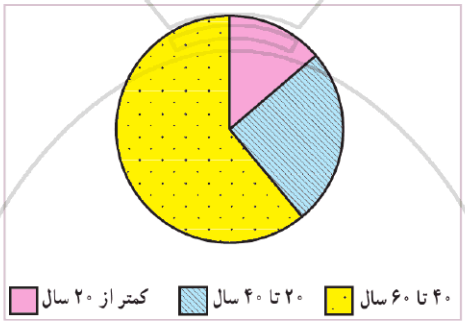
الف) با توجه به این نمودار، چند درصد افراد بازدیدکننده بین ۴۰ تا ۶۰ سال سن دارند؟

ب) مسئول فروش بلیت این سالن نمایش پس از مشاهده‌ی نتایج، آن را غیرواقعی دانست و گفت: «بیشتر بازدیدکنندگان این سالن کمتر از ۴۰ سال دارند.» از موارد زیر کدام‌یک می‌توانند نتایج این مطالعه را بدین شکل از واقعیت دور کرده باشد؟ توضیح دهید.

بسیاری از افراد کمتر از چهل سال تمایلی به پاسخ‌گویی به سؤال‌های پرسشگر نداشته‌اند.

گردآوری داده‌ها در ساعات اداری انجام شده است و بازنشستگان بیشتری در نمونه قرار گرفته‌اند.

هنگام گردآوری داده‌ها، دانش‌آموزان بسیاری از طرف مدرسه برای بازدید حضور داشته‌اند.



الف) زاویه‌ی گروه ۴۰ تا ۶۰ سال = ۳۶۰ − (۹۰ + ۵۴) = ۳۶۰ − ۱۴۴ = ۲۱۶ درجه. درصد = ۲۱۶ ÷ ۳۶۰ × ۱۰۰ = ٪۶۰ (گروه کمتر از ۲۰ سال ۱۵٪ و گروه ۲۰ تا ۴۰ سال ۲۵٪ است). پاسخ: ۶۰ درصد.

ب) مورد اول و دوم می‌توانند نتایج را از واقعیت دور کنند:

- مورد اول: اگر بسیاری از افراد زیر ۴۰ سال پاسخ نداده باشند، سهم آن‌ها در نمونه کمتر از سهم واقعی‌شان در جامعه می‌شود (سوگیری عدم پاسخ‌گویی) و گروه ۴۰ تا ۶۰ بیش از واقعیت دیده می‌شود.
- مورد دوم: ساعات اداری، افراد شاغل (که بیشتر زیر ۴۰ سال‌اند) سر کار هستند و شانس حضور در نمونه را ندارند، در حالی که بازنشستگان بیشتر حضور دارند؛ پس نمونه نماینده‌ی جامعه نیست.
- مورد سوم: حضور بسیاری از دانش‌آموزان، نمونه را از افراد جوان‌تر پرمی‌کرد و نتیجه را به سمت «کمتر از ۴۰ سال» می‌برد، نه به سمت ۴۰ تا ۶۰؛ پس این مورد نمی‌تواند علت ادعای مسئول فروش باشد.

۱۶۳ صفحه ۴۴ تمرین

۹. جدول زیر نشان‌دهنده‌ی تعداد تصادف خودروها و سرعت حرکت آن‌ها در زمان تصادف است.

همان‌طور که دیده می‌شود، تعداد تصادف خودروهایی که سرعتشان بیش از ۹۰ کیلومتر در ساعت بوده، کمتر است. پس: «هرچه سریع‌تر بروید، مطمئن‌تر و امن‌تر است.»

irantooshe.ir

نتیجه‌گیری بالا چه اشکالی دارد؟ چرا این تصویر ایجاد شده است؟

سرعت (کیلومتر در ساعت)	تعداد خودروهای تصادف کرده
۰ ــ ۱۰	۴۰
۱۰ ــ ۲۰	۱۳۰
۲۰ ــ ۳۰	۲۱۰
۳۰ ــ ۴۰	۲۵۰
۴۰ ــ ۵۰	۳۵۰
۵۰ ــ ۶۰	۲۴۰
۶۰ ــ ۷۰	۱۵۰
۷۰ ــ ۸۰	۷۰
۸۰ ــ ۹۰	۴۰
۹۰ ــ ۱۰۰	۲۰
۱۰۰ ــ ۱۱۰	۲۰
۱۱۰ ــ ۱۲۰	۱۰

جمع تصادف‌ها ۱۵۳۰ است که فقط ۵۰ تا (حدود ۳٪) مربوط به سرعت بیش از ۹۰ است؛ ولی این به معنای امن بودن سرعت زیاد نیست.

اشکال: جدول فقط «تعداد» تصادف‌ها را نشان می‌دهد، نه «درصد» آن‌ها نسبت به همه‌ی خودروهایی که با آن سرعت حرکت می‌کنند. بیشتر خودروها با سرعت ۳۰ تا ۶۰ (در شهر و مسیرهای پرترافیک) حرکت می‌کنند؛ پس طبیعی است تعداد تصادف‌ها در این سرعت‌ها بیشتر باشد. تعداد خودروهایی که با سرعت بیش از ۹۰ رانندگی می‌کنند بسیار کم است و تعداد تصادف‌ها هم کم می‌شود، حتی اگر احتمال تصادف برای هر خودرو در آن سرعت بیشتر باشد.

برای مقایسه‌ی درست باید نسبت یا درصد تصادف‌ها به تعداد کل خودروهای در حال حرکت با هر سرعت (فراوانی نسبی تصادف در هر گروه سرعت) را به دست آورد. مثلاً اگر ۲۰ تصادف از ۲۰ خودرو با سرعت بیش از ۹۰ باشد، درصد بالایی است، در حالی که ۳۵۰ تصادف از چند هزار خودرو درصد کمی می‌شود. این تصویر نادرست به خاطر گزارش تعداد بدون در نظر گرفتن اندازه‌ی گروه (جامعه‌ی مرجع) ایجاد شده است؛ همان خطای گزارش بدون درصد، یا درصد بدون تعداد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۶۴ صفحه ۴۴ پروژه

موضوعی دلخواه یا یکی از موضوعات زیر را انتخاب کنید و با استفاده از گام‌های چرخه‌ی آمار، نتایج حاصل را در قالب یک گزارش در کلاس ارائه کنید.

بررسی ساعات روزانه‌ی حضور دانش‌آموزان در شبکه‌های اجتماعی

نظرسنجی درباره‌ی تغییر قوانین حاکم بر کلاس یا مدرسه

نظرسنجی درباره‌ی کلاس درسی که می‌توانید پرسش‌های خود را آزادانه در آن مطرح کنید.

نظرسنجی درباره‌ی ساعات لازم برای تدریس ریاضی در کلاس دوازدهم انسانی

بررسی ساعت‌های مطالعه‌ی آزاد دانش‌آموزان و مقایسه‌ی آن بین دو گروه از دانش‌آموزان

بررسی فعالیت‌های فوق برنامه‌ی مورد علاقه‌ی دانش‌آموزان.

این پروژه پاسخ یگانه ندارد؛ نمونه‌ی طرح گزارش برای موضوع «ساعات روزانه‌ی حضور دانش‌آموزان در شبکه‌های اجتماعی»:

1. بیان مسئله: «میانگین (و میانه‌ی) ساعات روزانه‌ی حضور دانش‌آموزان پایه‌ی دوازدهم مدرسه‌ی ما در شبکه‌های اجتماعی در هفته‌ی جاری چقدر است؟» (جامعه: دانش‌آموزان پایه‌ی دوازدهم؛ متغیر: ساعت حضور روزانه، کمّی نسبتی)
2. طرح و برنامه‌ریزی: انتخاب تصادفی نمونه‌ای از دانش‌آموزان (مثلاً با قرعه‌کشی یا جدول اعداد تصادفی از فهرست مدرسه)؛ اندازه‌گیری با ثبت روزانه‌ی ساعت یا گزارش زمان استفاده‌ی خود گوشی؛ پرسشنامه‌ی بی‌نام؛ تعیین اندازه‌ی نمونه با توجه به پراکندگی.
3. گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها: جمع‌آوری برگه‌ها، وارد کردن در رایانه‌ی جدول (مانند اکسل) و بررسی اشتباه‌ها (مثلاً ساعت بیش از ۲۴ در روز).
4. تحلیل: رسم نمودار جعبه‌ای یا میله‌ای؛ محاسبه‌ی میانگین و انحراف معیار (اگر داده‌ی دورافتاده نبود) یا میانه و دامنه‌ی میان‌چارکی (اگر داده‌ی دورافتاده بود).
5. بحث و نتیجه‌گیری: تفسیر نتایج، بیان محدودیت‌ها (فقط پایه‌ی دوازدهم همین مدرسه) و پیشنهاد (مثلاً مدیریت زمان استفاده).

گزارش خود را با نمودارها و جدول‌های لازم در کلاس ارائه دهید.

ایران توشه
توشه‌ای برای فردا